

6ª Lista de Exercícios - 25/04/2011

1. Determine o raio de convergência da série. Para quais valores de x a série converge a) absolutamente, b) condicionalmente.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências ímpares de x são nulos. Para contornar essa dificuldade faça $y = x^2$ e analise a série resultante)

(j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências pares de x são nulos.)

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} (x-3)^n$

2. Determine as expansões em séries de potências das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas.

(a) $\frac{1}{(1+x)^2}$

(b) $\frac{1}{(1+x)^3}$

3. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$$

4. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

5. Mostre que a função de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

satisfaz a equação diferencial

$$xy'' + y' + xy = 0.$$