

Programação Matemática - 2010

Primeira Lista de Exercícios

Formulação de problemas e resolução gráfica

1) Escreva o modelo matemático dos seguintes problemas:

1.a. [Fonte: Livro Linear Programming and Network Flow - Bazaraa, M.S. e Jarvis, J.J. - Pg. 25 1.1] Uma fábrica produz alimentos para gado, ovelhas e galinhas. Isto é feito com a mistura dos seguintes ingredientes: milho, calcário, soja, e farinha de peixe. Este ingredientes contém os seguintes nutrientes: vitaminas, proteínas, cálcio e gordura bruta. A tabela a seguir indica a quantidade de nutrientes por quilograma de cada ingrediente.

	Nutrientes			
Ingredientes	Vitaminas	Proteínas	Cálcio	Gordura bruta
Milho	8	10	6	8
Calcário	6	5	10	6
Soja	10	12	6	6
Farinha de Peixe	4	8	6	9

A fábrica foi contratada para produzir 10 toneladas de ração para gado, 6 toneladas de ração para ovelha e 8 toneladas de ração para galinha. Por causa da escassez, existe um limite de quantidade disponível de cada ingrediente. Estes limites são: 6 toneladas de milho, 10 toneladas de calcário, 4 toneladas de soja e 5 toneladas de farinha de peixe. O preço por Quilograma de cada ingrediente é respectivamente de R\$ 0,20, R\$ 0,12, R\$ 0,24 e \$ 0,12. A tabela abaixo indica as quantidades mínimas e máximas de cada nutriente permitidas para os três tipos de alimentos.

	Nutrientes							
	Vitaminas		Proteína		Cálcio		Gordura Bruta	
Produtos	Mín	Máx	Mín	Máx	Mín	Máx	Mín	Máx
Ração de Gado	6	∞	6	∞	7	∞	4	8
Ração de Ovelha	6	∞	6	∞	6	∞	4	6
Ração de Galinha	4	6	6	∞	6	∞	4	6

Formule o problema de forma a minimizar o custo de produção, atendendo toda a demanda.

1.b. [Fonte: Livro Linear Programming and Network Flow - Bazaraa, M.S. e Jarvis, J.J. - Pg. 28 1.6] Freed tem R\$ 2200 para investir dentro dos próximos 5 anos. No início de cada ano ele pode investir dinheiro em investimentos de um ou dois anos. O banco paga 8% de juros para investimentos de um ano e 17% em investimentos de dois anos. Adicionalmente, o West World Limited oferece certificados de três anos no início do segundo ano. Com estes certificados o

retorno será de 27%(total). Se Fred reinvestir seu dinheiro todo ano, formule matematicamente o problema para mostrá-lo como maximizar seu dinheiro total ao final do quinto ano.

1.c.[Fonte: The Linear Programming Problem - Dantzig, G.B. e Thapa, M.N. - Pg. 25 1.4] O problema de galinhas e ovos. Suponha que uma galinha demora 2 semanas para botar 12 ovos ou chocar 4 ovos (nascem 4 novas galinhas). Qual a melhor programação de produção, se após 4 períodos todas as galinhas e ovos produzidos são vendidos a R\$ 0,60 cada galinha e R\$ 0,10 cada ovo. Formule o problema assumindo que considera:

1.c.I. Um estoque inicial de 100 galinhas e 100 ovos.

1.c.II. Um estoque inicial de 100 galinhas e zero ovos.

1.c.III. Um estoque inicial de 100 galinhas e zero ovos e um estoque final de 100 galinhas e zero ovos.

2) Desenhe a região factível, represente o vetor de custos e indique a(s) solução(ões) do problema, se ela(s) existir(em).

$$\begin{array}{ll} 2.a. & \text{Max} \quad 3x_1 + x_2 \\ & \text{S.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & \quad -3x_1 - x_2 \leq -1 \\ & \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & \quad 2x_2 \leq -1 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2.b. & \text{Max} \quad 2x_1 + x_2 \\ & \text{S.a:} \quad -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \quad x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2.c. & \text{Max} \quad 2x_1 + 3x_2 \\ & \text{s.a:} \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2.d. & \text{Min} \quad x_1 + 2x_2 \\ & \text{s.a:} \quad x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & \quad 4x_1 + x_2 \geq 3 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

3) Formule matematicamente e resolva graficamente.

3.1. Um jovem atleta sente-se atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe, por experiência, que:

- A natação exige um gasto em mensalidade do clube e deslocamento até a piscina que pode ser expresso em um custo médio de 03 (três) reais por seção de treinamento de duas horas.
- O ciclismo, mais simples, acaba custando cerca de 02 (dois) reais pelo mesmo tempo de prática.
- O orçamento do jovem permite dispor de R\$ 70 reais para treinamento.
- Seus afazeres da universidade lhe dão liberdade de dispende, no máximo, 18 horas e 80000 calorias por semana para os esforços físicos.

- Cada seção de natação consome 1500 calorias, enquanto cada etapa ciclística dispende 1000 calorias.
- Considerando que o rapaz goste igualmente de ambos os esportes o problema consiste em planejar seu treinamento de forma a maximizar o número de seções de treinamento.

a. Como o jovem deve planejar a sua vida de modo a obter o número máximo de seções? Formule o problema como um problema de otimização linear.

b. Resolva o problema graficamente.

3.2 Um pequeno produtor tem 10 unidades de terra e planeja cultivar trigo e milho para vender ao mercado interno. A produção esperada é de 20 kg por unidade de área plantada de trigo e 30 kg por unidade de área plantada de milho. Para atender ao consumo interno de sua fazenda, ele deve plantar, pelo menos, 1 unidade de área de trigo e 3 unidades de área de milho. Os silos da fazenda têm condição de armazenar 120 kg de produtos. O trigo fornece um R\$ 1,20 por kg e o milho, R\$ 0,28 por kg.

a. Formule o problema como um problema de otimização linear.

b. Resolva-o graficamente.

c. O produtor tem condição de vender alguma cultura ao mercado interno? Qual e em que quantidade?

d. Qual a restrição poderia ser retirada do problema sem que o valor da solução ótima fosse alterado?

e. Suponha que o mercado esteja em falta de milho e, portanto, o produtor tenha um lucro de R\$ 1,00 por kg de milho. Mostre, graficamente, se a solução ótima muda.

3.3 Em um dado processo químico, podem ser produzidos (simultaneamente ou não, dependendo de certas substâncias adicionais) dois produtos (A e B) os quais são vendidos para outra indústria e utilizados na produção de um terceiro produto. Especificamente, 1 litro do produto A produz 1 litro do terceiro produto e 1 litro de B produz 2,5 litros do terceiro produto. Há uma restrição de demanda que diz que A e B devem ser produzidos numa quantidade suficiente para produzir 5 litros do terceiro produto a cada hora durante a jornada de trabalho da indústria. Durante o processo químico, sabe-se que o produto B consome oxigênio, enquanto o produto A produz oxigênio. Cada litro produzido do produto B consome 2 litros de oxigênio por hora e cada litro de produzido do produto A produz 1 litro de oxigênio por hora. Para estender a vida útil do catalisador, a quantidade de oxigênio no reator não pode exceder 2 litros por hora (se necessário, pode-se adicionar oxigênio extra sem custos relevantes). Cada litro de produto A é vendido por R\$ 25 e cada litro de produto B, R\$ 55. A indústria deseja maximizar o lucro decorrente da venda dos dois produtos.

a. Formule o problema como um problema de programação linear.

b. Resolva-o graficamente, indicando a solução ótima do problema (vértice ótimo) e o valor da função objetivo.

c. Resolva o problema, graficamente, supondo que os valores R\$ 25 e R\$ 55 sejam os custos de produção de cada litro dos produtos A e B, respectivamente e o objetivo seja minimizar o custo total.