Programação Matemática - Otimização Linear

Professora: Maristela Oliveira dos Santos
Auxilio 2009: Victor C.B. Camargo
Auxilio 2010 - PAE: Marcos Mansano Furlan

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC
Universidade de São Paulo - USP

Março de 2010

Problema de Transporte

O PROBLEMA DE TRANSPORTE

Problema de Transporte

- Transportar itens de centros de *origens* a centros de *destinos*,
- São dados conhecidos do problema:
  - o custo de transporte de cada item;
  - as quantidades dos itens disponíveis em cada centro;
  - e as demandas de cada consumidor.
- O transporte deve ser efetuado de modo que as limitações de oferta em cada centro seja respeitada e a demanda de cada mercado atendida e o custo total de transporte seja mínimo.

Possíveis Aplicações

O Problema de transporte pode surgir em diversas situações.

- Transporte de alimentos de indústrias aos mercados consumidores;
- Transporte de pedras de centros de mineração para depósitos ao longo de uma rodovia em construção;
- Designação de tarefas a máquinas;
- Transporte de produção agrícola do campo até armazéns.

Exemplo 1 - transporte de bebidas

Uma indústria de bebidas possui:

- Dois centros de produção ($m = 2$), Araraquara e São José dos Campos
- Três mercados consumidores ($n = 3$), São Paulo, Belo Horizonte e Rio de Janeiro.

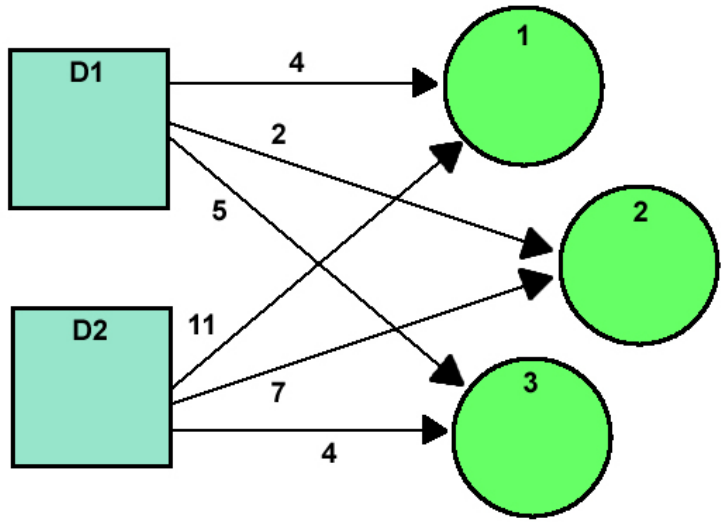
Sejam:

- x_{ij} a quantidade do produto (uma unidade pode ser um engradado contendo dezenas de garrafas) a ser enviada do centro de produção i ao mercado consumidor j.
- c_{ij} o custo unitário do transporte de uma unidade de produto do centro de produção i ao mercado consumidor j.

Exemplo 1

Os custos são dados na tabela abaixo:

Centro de Suprimento	São Paulo (1)	Belo Horizonte (2)	Rio de Janeiro (3)	Suprimento Disponível a_i
Araraquara (1)	4	2	5	800
S. J. dos Campos (2)	11	7	4	1000
Demanda dos (b_j) Mercados	500	400	900	1800



Exemplo 1

O modelo matemático para este problema é dado por:
Minimizar $f(x_{11}, ..., x_{23}) = 4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 11x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23}$
sujeito a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 800$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000$$
$$x_{11} + x_{21} = 500$$
$$x_{12} + x_{22} = 400$$
$$x_{13} + x_{23} = 900$$
$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0$$

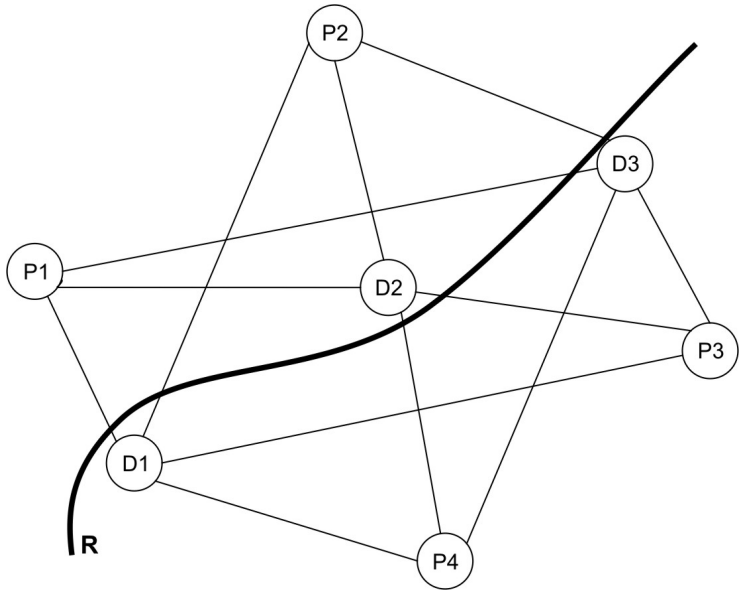
Exemplo 2 - transporte de rochas

Considere o problema de se transportar agregados para a construção de uma rodovia e suponha que:

- Não estejam disponíveis na região jazidas de rochas adequadas à obtenção de pedra britada;
- Este material deve ser transportado de jazidas próximas para alguns pontos convenientes preestabelecidos ao longo de onde será implantada a estrada.

Exemplo 2 - transporte de rochas

Os caminhos que ligam cada pedreira aos pontos de depósito são representados pela figura:



Exemplo 2

Os custos de transporte de cada jazida aos depósitos são dados na seguinte tabela:

Pedreiras	**Depósito 1**	**Depósito 2**	**Depósito 3**	**Oferta** a_i
1	30	13	21	433
2	12	40	26	215
3	27	15	35	782
4	37	25	19	300
Demanda (b_j)	697	421	612	

x_{ij} é a quantidade (m^3) transportada de rochas da jazida i para o deposito j.

Exemplo 2

O modelo matemático deste problema é dados por:
Minimizar
$f(x_{11}, ..., x_{43}) = 30x_{11} + 13x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 40x_{22} + 26x_{23} + 27x_{31} + 15x_{32} + 35x_{33} + 37x_{41} + 25x_{42} + 19x_{43}$
sujeito a:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 433 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 215 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 782 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leq 300 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 697 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 421 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 612
\end{aligned}
$$

$x_{ij} \geq 0, i = 1, ..., 4; j = 1, ...3$

Problema de Designação

O problema de transporte também pode surgir em outras situações. Suponha que n tarefas devam ser atribuídas a n pessoas e que p_{ij} mede o interesse do individuo i na realização da tarefa j.
Variáveis de decisão:

- $x_{ij} = 1$ se o individuo i for designado para a realização da tarefa j
- $x_{ij} = 0$, caso contrário.

Formulação Matemática

A formulação do problema de *designação* (ou *atribuição*) é:

$$\text{Maximizar} \quad f(\mathbf{x_{11}}, \mathbf{x_{12}}, ..., \mathbf{x_{nn}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}$$

$$\text{Sendo:} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Problema de Transporte

O PROBLEMA DE TRANSPORTE - Exercício

Considere o exemplo 1 - transporte de bebidas

Uma indústria de bebidas possui:

- Dois centros de produção ($m = 2$), Araraquara (1) e São José dos Campos (2)
- Três mercados consumidores ($n = 3$), São Paulo(5), Belo Horizonte(6) e Rio de Janeiro(7).
- A indústria de bebidas dispõe de dois depósitos para abastecer os mercados consumidores: Campinas (3) e Barra Mansa (4).

Considere que os mercados são abastecidos apenas a partir dos depósitos.

Exercício

Os custos unitários de transporte de centros de suprimento aos depósitos são dados na tabela abaixo:

	Campinas(3)	Barra Mansa(4)
Araraquara (1)	1	3
S.J. Campos(2)	1	2

Exercício

Os custos unitários de transporte dos depósitos aos mercados consumidores são dados abaixo:

	São Paulo (5)	Belo Horizonte(6)	Rio de Janeiro(7)
Campinas(3)	1	3	3
Barra Mansa(4)	3	4	1

Apresente o modelo matemático.

Problema de Designação

Problema de Designação - Exercício

Exercício

Quatro construções diferentes A, B, C e D devem ser levantadas em um campus universitário por quatro empreiteiras 1, 2, 3 e 4. Como todas as empreiteiras contribuem muito para o fundo dos alunos, cada uma delas deve construir um edifício. Cada empreiteira fez suas propostas no tocante às quatro construções. Estas aparecem no quadro abaixo: O problema consiste em determinar que construção designar a que empreiteira para que o custo da obtenção dos quatro edifícios permaneça mínimo. Apresente o modelo matemático. Resolva o exercício no Excel.

Exercício -Designação

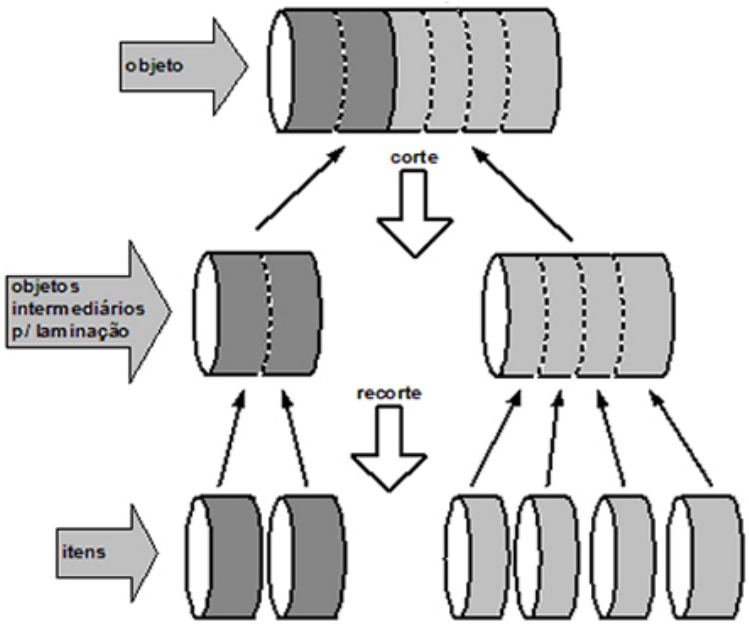
	Empreiteira			
Construção	1	2	3	4
A	48	48	50	44
B	56	60	60	68
C	96	94	90	85
D	42	44	54	46

O Problema de Corte e Empacotamento

O PROBLEMA DE CORTE E EMPACOTAMENTO

Introdução

- Problema de Corte - consiste no uso de estratégias para a produção de itens (peças pequenas), a partir do corte de um objeto (peça grande), garantindo que a perda do material utilizado seja mínima.



Aplicações

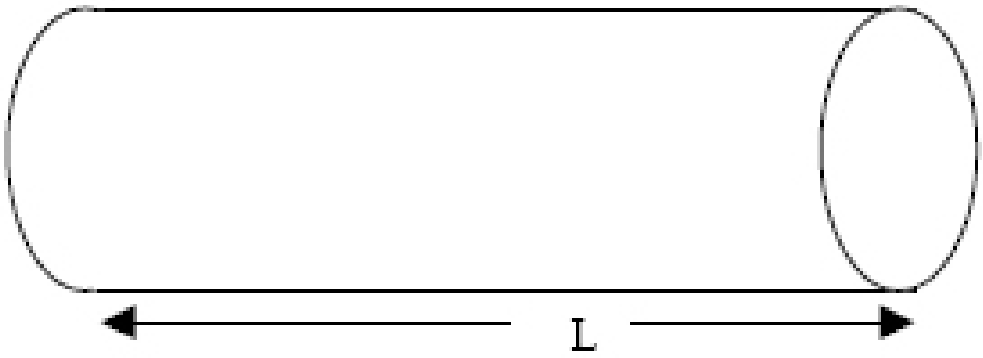
- Corte de bobinas de papel - bobinas-jumbo são cortadas em sub-bobinas (21cm, 29,7cm, etc) que, por sua vez, podem ainda ser cortadas em retângulos (tamanho A4, por exemplo);
- Corte de barras metálicas - através do corte de tubos ou perfis metálicos grande são produzidas as treliças (estrutura formada de barras lineares, usadas na construção civil, construção de aviões, etc);
- Corte de tecidos;
- Corte de espumas para produção de colchões e travesseiros;
- Empacotamento de produtos em caminhões.

Problema do Corte Unidimensional

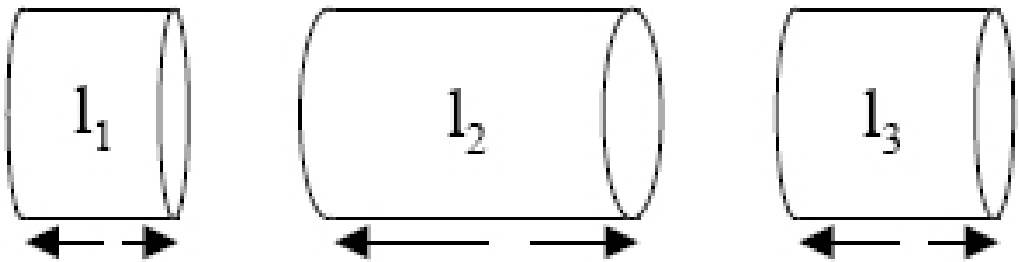
- Aplicações: Indústrias de papel, tecido, vidro, barras de aço , entre outras, que fabricam seus produtos em peças de tamanho fixo (tamanho padrão);
- Seja uma barra grande de comprimento L e um conjunto de pequenas barras de comprimento l_i , $i = 1, \ldots, m$, chamaremos estas pequenas barras de itens, e seja d_i uma determinada quantia de itens de tamanho l_i desejados, $i = 1, \ldots, m$.
- Assim, o problema de corte consiste em produzir itens a partir do corte de barras grandes, de forma que a demanda seja atendida e uma determinada função seja otimizada, como por exemplo, minimizar o número de barras cortadas, minimizar a perda ou maximizar o lucro.

Problema do Corte Unidimensional

- Objeto de tamanho padrão L:



- Itens em carteira de pedidos:

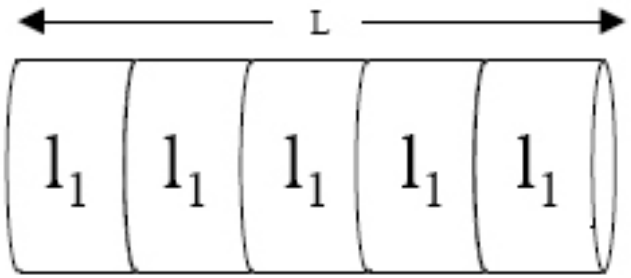


Problema do Corte Unidimensional

- Padrão de corte 1 definido por $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T$, onde a_{i1} é o número de itens do tipo i cortado conforme o padrão de corte 1. No exemplo, $a_1 = (5, 0, 0)^T$.

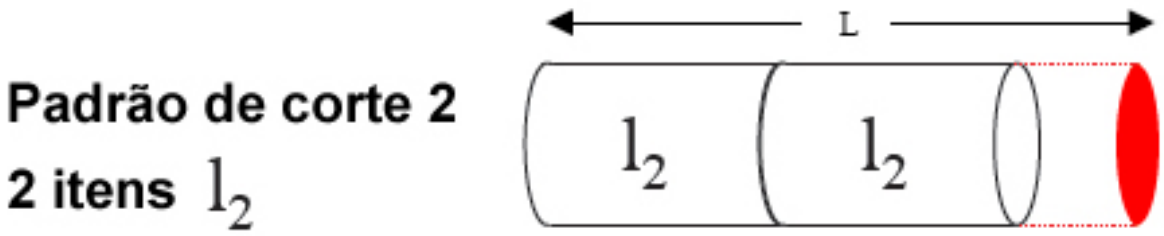
Padrão de corte 1

5 itens l_1



Problema do Corte Unidimensional

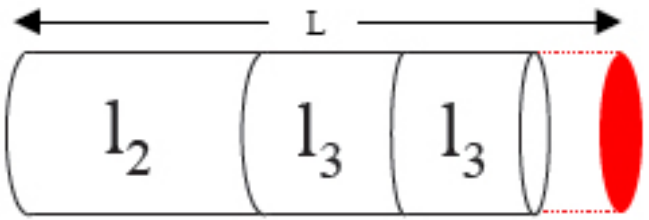
- Padrão de corte 2 definido por $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$, onde a_{i2} é o número de itens do tipo i cortado conforme o padrão de corte 2. No exemplo, $a_2 = (0, 2, 0)^T$.



Problema do Corte Unidimensional

- Padrão de corte 2 definido por $a_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$, onde a_{i3} é o número de itens do tipo i cortado conforme o padrão de corte 3. No exemplo, $a_3 = (0, 1, 2)^T$.

Padrão de corte 3
1 itens l_2
2 itens l_3



Padrões de corte

- Vários padrões distintos podem ser determinados.
- Como definir um padrão de corte?
- Um vetor α representa um padrão de corte se e somente se o seguinte sistema é satisfeito:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_m\alpha_m \leq L$$
$$\alpha_j \geq 0 \text{ e } \texttt{inteiro}, \; j = 1, \ldots, m$$

Problema da Mochila Inteiro - Determinando um padrão de corte

$$\begin{gathered}\textbf{max } z = v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \ldots + v_n\alpha_n \\ l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_n\alpha_n \leq L \\ \alpha_j \geq 0 \text{ e } \texttt{inteiro}, \; j = 1, \ldots, m\end{gathered}$$

- O problema anterior para determinação de padrões de corte é um problema de otimização linear inteira e será estudado com mais detalhes na segunda metade do curso de PM.
- Observação: Para modelagem dos problemas de cortes, vamos supor que conhecemos todos os padrões, ou seja, conhecemos todas as maneiras possíveis de cortar uma peça de tamanho L em peças de tamanhos l_i.

Problema do Corte Unidimensional

Vamos considerar um problema em que:

- $L = 170$ cm
- $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 50$ cm, $l_3 = 55$ cm

e a demanda para os itens menores é:

- $d_1 = 80$, $d_2 = 120$, $d_3 = 110$

Quantos esquemas de corte são possíveis?

Problema do Corte Unidimensional

Vamos considerar um problema em que:

- $L = 170$ cm
- $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 50$ cm, $l_3 = 55$ cm

e a demanda para os itens menores é:

- $d_1 = 80$, $d_2 = 120$, $d_3 = 110$

Quantos esquemas de corte são possíveis?

$$30y_1 + 50y_2 + 55y_3 \leq 170$$
$$y_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \ j = 1, 2, 3$$

Problema do Corte Unidimensional

Existem 27 padrões de corte possíveis. Entre estes temos os seguintes padrões: $a_1, a_{19}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{27}$ e suas respectivas perdas:

	a_1	a_{19}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{27}
l_1	0	2	3	4	1	2
l_2	0	0	1	1	2	1
l_3	1	2	0	0	0	1
perda	115	0	30	0	5	40

$$30y_1 + 50y_2 + 55y_3 \leq 170$$

Construindo um modelo

Neste problema temos:

elementos conhecidos: esquema de corte, demanda de cada ítem;

Construindo um modelo

Neste problema temos:

elementos conhecidos: esquema de corte, demanda de cada ítem;

elementos desconhecidos: quantas vezes um determinado esquema de corte será usado;

Construindo um modelo

Neste problema temos:

elementos conhecidos: esquema de corte, demanda de cada ítem;

elementos desconhecidos: quantas vezes um determinado esquema de corte será usado;

objetivo a ser alcançado: usar o menor número possível de esquemas de corte;

Construindo um modelo

Neste problema temos:

elementos conhecidos: esquema de corte, demanda de cada ítem;

elementos desconhecidos: quantas vezes um determinado esquema de corte será usado;

objetivo a ser alcançado: usar o menor número possível de esquemas de corte;

restrições: o número de itens obtidos com os esquemas de corte usados de ser maior ou igual a demanda.

Construindo um modelo

Variáveis de decisão:

- Quantas vezes usar um determinado padrão de corte?
- Faça a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ representar os diversos padrões de corte.

Definimos então as variáveis de decisão:
$x_j =$ número de vezes que o padrão de corte j será usado,
$j = 1, 2, \ldots, n$.

Construindo um modelo- Podemos considerar os seguintes objetivos

Objetivo (1): Usar o menor número possível de padrões de corte:

$$\textbf{min } z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Objetivo (2): Seja r_j a perda associada ao padrão de corte j; Minimizar a perda total:

$$\textbf{min } z = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_n x_n$$

Construindo um modelo

Restrições:

- O número de itens de cada tipo deve ser maior ou igual a demanda.
- Seja a_{ij} o número de peças do tipo i obtidos usando o esquema de corte j.
- Para atender a demanda do item 1 temos que:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

- De forma geral, a restrição relativa ao item i é dada por:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Modelo de Otimização

$$\textbf{min } z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n &\geq 0 \textit{einteiras} \end{aligned}$$

Em geral, as variáveis $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ são necessariamente inteiras pois representam o número de barras cortadas de acordo com um padrão de corte. Esta condição dificulta substancialmente a resolução do modelo matemático. Porém, em muitas situações práticas, essa condição de integralidade pode ser relaxada.

Modelo de Otimização

Podemos reescrever as restrições do problema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Observe que cada **coluna da matriz** está associada à um **padrão de corte**. Em geral, $n \Rightarrow \infty$.
- Impossível gerar ou mesmo armazenar o n padrões de corte.
  - Geração de colunas - Problema da Mochila.

EXEMPLO 1

Na resolução apresentada a seguir, consideramos, para fins de ilustração, as variáveis não negativas e inteiras e apenas os seis padrões ilustrados anteriormente, ou seja, os padrões: $a_1, a_{19}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{27}$. Além disso, consideramos o objetivo de minimizar o número de padrões usados, ou seja, o objetivo 1.

$$\textbf{min } z = x_1 + x_{19} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{27}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} x_{19} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{22} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{23} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_{24} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_{27} \geq \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 110 \end{bmatrix}$$

$$x_1,\ x_{19},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{27} \geq 0 \text{ e inteiras.}$$

EXEMPLO 1- Resolução

- Valor da função objetivo: $z = 115,00$
- Usar 55 vezes o padrão de corte 19: $A_{19}^t = (2, 0, 2)$
- Usar 60 vezes o padrão de corte 24: $A_{24}^t = (1, 2, 0)$
- Sobra de 90 itens do tipo 1

EXEMPLO 2

Considerando os mesmos 6 padrões de corte anteriores mas mudamos o objetivo. Agora consideramos que nosso objetivo seja minimizar as perdas. Outra vez consideramos que as variáveis são não negativas e inteiras:

$$\textbf{min } z = 115x_1 + 0x_{19} + 30x_{22} + 0x_{23} + 40x_{24} + 5x_{27}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} x_{19} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{22} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{23} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_{24} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_{27} \geq \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 110 \end{bmatrix}$$

$$x_1,\ x_{19},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{27} \geq 0 \text{ e inteiras.}$$

EXEMPLO 2- Resolução

- Valor da função objetivo: $z = 0,00$
- Usar 55 vezes o padrão de corte 19: $A_{19}^t = (2, 0, 2)$
- Usar 60 vezes o padrão de corte 23: $A_{23}^t = (4, 0, 1)$
- Sobra de 510 itens do tipo 1

Padrões de corte para o EXEMPLO

Existem 27 padrões de corte para o exemplo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	0	0	0
0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	1	2	1
1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	2	3	1	2	1	2	3	4	1	2	1	2
0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	1	1
1	1	1	2	2	0	0	0	0	0	0	1	1

EXEMPLO 1 - Solução considerando o objetivo 1 - Minimizar o número de barras cortadas e as variáveis inteiras e não-negativas

Considerando todos os 27 padrões de corte possíveis:

- Valor da função objetivo: $z = 90,00$
- Usar 30 vezes o padrão de corte 3: $A_3^t = (0, 0, 3)$
- Usar 20 vezes o padrão de corte 13: $A_{13}^t = (0, 2, 1)$
- Usar 40 vezes o padrão de corte 25: $A_{25}^t = (2, 2, 0)$
- Não há sobra de itens.

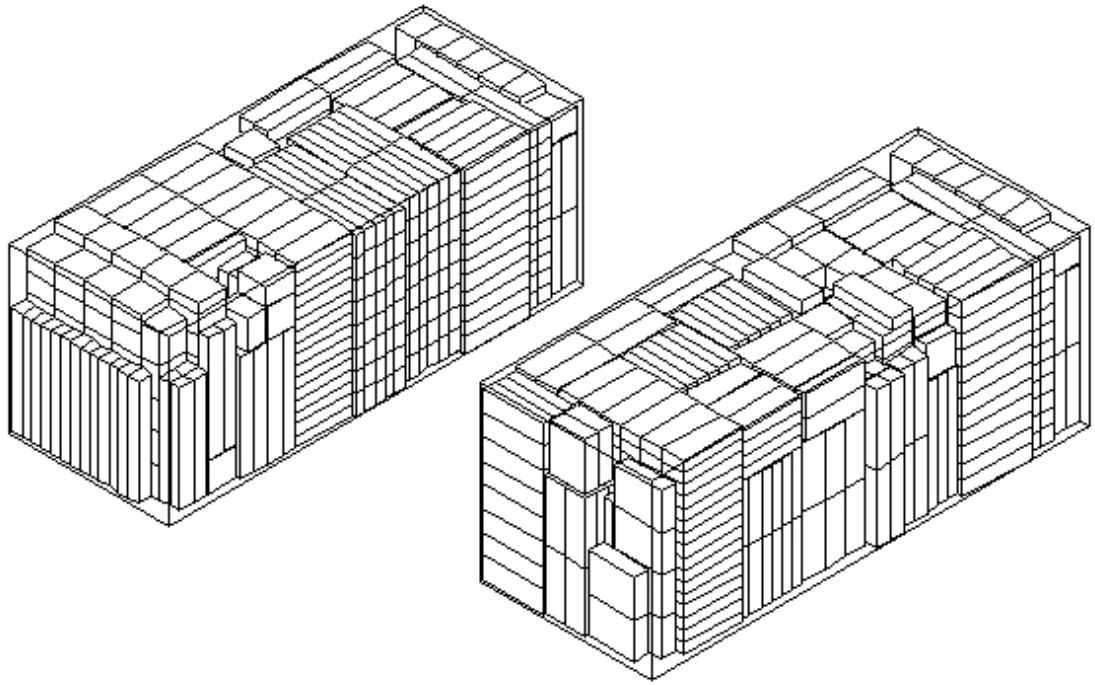
EXEMPLO 2 - Solução - Considerando o objetivo 2 - minimizar as perdas e as variáveis inteiras e não-negativas

Considerando todos os 27 padrões de corte possíveis:

- Valor da função objetivo: $z = 0,00$
- Usar 55 vezes o padrão de corte 19: $A_{19}^t = (2, 0, 2)$
- Usar 60 vezes o padrão de corte 23: $A_{23}^t = (4, 0, 1)$
- Sobra de 510 itens do tipo 1

Introdução

- Problema de Empacotamento - consiste no uso de estratégias de alocações de itens em objetos, garantindo a minimização de espaços vazios.



Referências Bibliográficas

- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Campus/elsevier, 2007. 523 p. ISBN 10-85-352-145-1454-2.
- GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L.; **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Campus, 2000.
- NASCIMENTO, M.C.V.; ALÉM JUNIOR, D.J; CHERRI, L.H.; MASSAMITSU,F. **Apresentações para aulas de modelagem matemática**. São Carlos: ICMC-USP, 2008.
- PERIN, C. **Introdução à Programação Linear**. Coleção Imecc - Textos Didáticos. V.2. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001. 177p.
- RANGEL, M.S. **Material de aula**. São José do Rio Preto: IBILCE-UNESP.