

1. Exercício 28, Cap. 2 em [1].
2. *Definição* Considere $\mathbf{x} \in \Omega$ e $\mathbf{y} \in \Omega$. Se $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ são duas estatísticas tais que $\mathbf{T}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{y})$ se, e somente se, $\mathbf{T}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_2(\mathbf{y})$, então $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ são chamadas de estatísticas equivalentes.

Pode ser provado que $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ são equivalentes se, e somente se, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{v}(\mathbf{T}_1)$, em que $\mathbf{v}$ é uma função bijetora. Quais das seguintes estatísticas são equivalentes?

- (a) $\prod_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.
(b) $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.
(c) $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)^\top$ e $(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)^\top$.

3. Considere uma distribuição da família exponencial com parâmetros naturais $\eta_1, \dots, \eta_p$ e estatísticas suficientes $T_1(\mathbf{X}), \dots, T_p(\mathbf{X})$, $p \geq 2$.

- (a) Se as estatísticas $T_1(\mathbf{X}), \dots, T_p(\mathbf{X})$ satisfazem uma restrição linear, prove que o modelo $\{P_\eta : \eta \in \Theta^*\}$ não é identificável.

Considere apenas o caso em que $p = 2$ e $T_1(\mathbf{X}) = T_2(\mathbf{X})$.

- (b) Se os parâmetros naturais $\eta_1, \dots, \eta_p$ satisfazem uma restrição linear, prove que a dimensão da distribuição pode ser reduzida.

4. Prove que uma estatística $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se, e somente se, a distribuição condicional de $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ dada $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$ para qualquer estatística $\mathbf{U}(\mathbf{X})$.

5. Considere $\theta \in \Theta = (0, 1)$ e

$$\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{multinomial} \left(m, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1 - \theta), \frac{1}{4}(1 - \theta), \frac{\theta}{4} \right).$$

Apresente uma estatística suficiente para θ .

6. Sejam $X_i \stackrel{\text{indep.}}{\sim} f(\cdot; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \exp(i\theta - x)I_{(i\theta, \infty)}(x)$, $i = 1, \dots, n$. Represente graficamente $f(x; \theta)$. Prove que $\min(X_i/i, i = 1, \dots, n)$ é uma estatística suficiente para θ .

7. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\theta, a\theta^2)$, sendo que $a > 0$ é uma constante conhecida e $\theta > 0$. Apresente uma estatística suficiente para θ .
8. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}(\theta_1, \theta_2)$, em que $\theta_1 \in \mathbb{R}$ e $\theta_2 \in (\theta_1, \infty)$. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top$.

Referência

- [1] Shao, J. *Mathematical Statistics*, 2nd ed., New York: Springer, 2003.