

1. O vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^\top$ tem média $\boldsymbol{\mu} = (4, 3, 2, 1)^\top$ e matriz de covariâncias

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & & 9 & -2 \\ & & & 4 \end{bmatrix}.$$

O vetor $\mathbf{X}$ é dividido como $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)\top}, \mathbf{X}^{(2)\top})^\top$, sendo que $\mathbf{X}^{(1)} = (X_1, X_2)^\top$.

Considere $\mathbf{a} = (1, 2)^\top$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Calcule (a) $E(\mathbf{a}^\top \mathbf{X}^{(1)})$, (b) $\text{cov}(\mathbf{X}^{(2)})$, (c) $\text{cov}(\mathbf{A}\mathbf{X}^{(2)})$, (d) $\text{cov}(\mathbf{a}^\top \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{A}\mathbf{X}^{(2)})$ e (e) $\text{var}(\mathbf{a}^\top \mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)})$.

2. Seja $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, sendo que $\boldsymbol{\mu} = (-3, 1, 4)^\top$ e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual(is) dos(as) seguintes vetores ou variáveis são independentes? (a) X_1 e X_2 , (b) X_2 e X_3 , (c) $(X_1, X_2)^\top$ e X_3 , (d) $(X_1 + X_2)/2$ e X_3 e (e) X_2 e $X_2 - 5X_1/2 - X_3$. Determine a distribuição de (f) $X_1 \mid X_3 = x_3$ e (g) $X_1 \mid (X_2, X_3)^\top = (x_2, x_3)^\top$.

3. O vetor aleatório $(X_1, X_2)^\top$ tem função densidade de probabilidade

$$f(x_1, x_2) = 2, \text{ se } 0 < x_1 < x_2 < 1; \quad f(x_1, x_2) = 0, \text{ caso contrário.}$$

- (a) Apresente as funções densidade de probabilidade marginais de X_1 e X_2 .
 (b) X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes?

4. Exercício 2.32, p. 108 em Johnson and Wichern (2007).

5. Exercício 2.41, p. 109 em Johnson and Wichern (2007).

6. O vetor aleatório $\mathbf{X}$ tem esperança $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^\top$ e matriz de covariâncias

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \rho \leq 1.$$

(a) Determine a distância estatística $d = \{(\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu})\}^{1/2}$ entre $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top$ e $\boldsymbol{\mu}$.

(b) Discuta o comportamento de d como função de ρ .

(c) Represente graficamente d como função de ρ .

7. Se $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, prove que

$$Z = \frac{\mathbf{a}^\top (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{\mathbf{a}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}}} \sim N(0, 1).$$

8. Se $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & a \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

determine o valor de a para que $\mathbf{b}^\top \mathbf{X}$ e $\mathbf{c}^\top \mathbf{X}$ sejam independentes, com $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^\top$ e $\mathbf{c} = (1, -1, -1)^\top$.

9. Se $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \rho \leq 1,$$

prove que a distribuição condicional de $(X_1, X_2)^\top$ dada $X_3 = x_3$ é normal com média $(\mu_1 + \rho^2(x_3 - \mu_3), \mu_2)^\top$ e matriz de covariâncias

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho^4 & \rho \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Exercício 3.13, p. 146 em Johnson and Wichern (2007).

11. Exercício 3.16, p. 147 em Johnson and Wichern (2007).

12. Exercício 4.2, p. 200 em Johnson and Wichern (2007).

13. Exercício 4.4, p. 201 em Johnson and Wichern (2007).

14. A função densidade do vetor $\mathbf{X}$ é dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{55\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{1512} (36x_1^2 - 24x_1x_2 + 25x_2^2 - 120x_1 - 2x_2 + 121) \right\},$$

para $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $E(X_1)$, $E(X_2)$, $\text{var}(X_1)$, $\text{var}(X_2)$ e $\text{cov}(X_1, X_2)$.

(b) Apresente algumas curvas de nível de $f(\mathbf{x})$.

15. A função densidade do vetor $\mathbf{X}$ é dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi e} x_1^3 x_2^3 I_{[-1,1]}(x_1) I_{[-1,1]}(x_2),$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, sendo que $I_A(y)$ denota a função indicador do conjunto A , igual a 1, se $y \in A$, e igual a 0, se $y \notin A$.

(a) Prove que a distribuição de $\mathbf{X}$ não é normal bivariada.

(b) Prove que a distribuição marginal de X_j é normal, para $j = 1, 2$.

16. Exercício 4.39(a) e (b), p. 207 em Johnson and Wichern (2007).

Referência

Johnson, R. A. and Wichern, D. W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*, sixth ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2007.