

1ª Lista de Exercícios - SME0820 Análise de Regressão - 06/03/2013

Exercício 1. Mostre que

$$(a) S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$$

$$(b) S_{YY} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})Y_i = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2.$$

$$(c) S_{XY} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})X_i = \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}.$$

Exercício 2. Um aluno escreveu o modelo de regressão linear simples na forma

$$E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Você concorda? Justifique.

Exercício 3. Avalie a seguinte sentença: "Para o método dos mínimos quadrados ser plenamente válido, é necessário que a distribuição da variável resposta Y seja normal". Justifique.

Exercício 4. Considere um modelo de regressão linear simples do tipo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

assumindo que $E(\epsilon_i) = 0$, $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$ e $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ para $i \neq j$. Denotando por $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ os estimadores de mínimos quadrados de β_0 e β_1 , respectivamente, mostre que

$$(a) \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{-\sigma^2 \bar{X}}{S_{XX}}.$$

$$(b) \text{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) = 0.$$

Exercício 5. Considere o modelo de regressão linear simples

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

assumindo que $\epsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Mostre que o estimador de máxima verossimilhança de σ^2 é viesado e calcule seu vício.

Exercício 6. Considere o modelo de regressão

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que $E(\epsilon_i) = 0$, $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$ e $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ para $i \neq j$. Qual a implicação para a função de regressão se $\beta_1 = 0$, ou seja, o modelo é $Y_i = \beta_0 + \epsilon_i$? Como seria o gráfico da função de regressão?

Exercício 7. Considere o modelo

$$Y_i = \beta_0 + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

em que $E(\epsilon_i) = 0$, $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$ e $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ para $i \neq j$.

(a) Utilizando o método de mínimos quadrados, encontre o estimador de β_0 para este modelo.

(b) Prove que o estimador de β_0 obtido no item (a) é não viesado.

Exercício 8. Considere um modelo de regressão linear simples sem intercepto, com variável resposta Y e variável explicativa X ,

$$Y_i = \beta X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

assumindo que $E(\epsilon_i) = 0$, $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$ e $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ para $i \neq j$.

(a) Obtenha o estimador de mínimos quadrados de β . Esse estimador é viesado?

(b) Apresente um estimador adequado para σ^2 . Comente sobre suas propriedades.

Exercício 9. Considere o modelo de regressão sem intercepto $Y_i = \beta X_i + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$.

(a) Encontre o estimador de mínimos quadrados de β .

(b) Suponha que os erros $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ são independentes e que σ^2 é conhecido. O estimador de máxima verossimilhança de β é o mesmo estimador obtido pelo método de mínimos quadrados?

(c) Mostre que o estimador de máxima verossimilhança de β é não viesado.