

Programação Matemática

Professora: Maristela Oliveira dos Santos

Auxilio 2009: Victor C.B. Camargo

Auxilio 2010 - PAE: Marcos Mansano Furlan

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC
Universidade de São Paulo - USP

Março de 2010

O Problema de Programação de Projetos

O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO -
EXEMPLOS MAIS ELABORADOS

Idéia geral

- Considere a existência de $i = 1 \cdots m$ recursos e $j = 1 \cdots n$ produtos.
- Recursos limitados (Cap_i).
- A produção de cada produto j consome uma quantidade de cada tipo de recurso (a_{ij}).
- Cada produto representa um lucro (c_j).
- Há uma demanda mínima (d_j) e máxima (v_j).
- Variáveis de decisão: X_j = Quantidade produzida de cada produto j .

Modelo Geral

Minimizar $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

Sendo:
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq Cap_i, i = 1, \dots, m \\ d_j \leq x_j \leq v_j, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Problema de planejamento da produção

Uma empresa fabrica diversos produtos e tem uma carteira de pedidos para o mês atual. Existe mais de uma maneira de produzir cada item (tecnologias diferentes). O problema é escolher que recursos usar para fabricação de cada produto (com o menor custo possível).

- c_{ij} - custo de fabricar uma unidade do produto i no processo j .
- d_i - demanda do produto i .
- cap_k - quantidade disponível do recurso k .
- a_{ijk} - quantidade do recurso k necessária para produzir uma unidade do produto i por meio do processo j .
- J_i - conjunto dos processos que podem ser utilizados para fabricar o produto i .

Programação da Produção - Múltiplos recursos e processos

Variáveis – x_{ij} - quantidade do produto i fabricado através do processo j .

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sendo:} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J_i} x_{ij} = d_i, i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i} a_{ijk} x_{ij} \leq \text{Cap}_k, k = 1, \dots, K \\ d_j \leq x_{ij} \leq v_j, j = 1, \dots, J, i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \end{array}$$

Problema de Dimensionamento de Lotes

Empresas de manufatura fabricam diversos tipos de produtos solicitados por diferentes clientes, muitas vezes em grandes quantidades, os quais devem estar prontos para entrega em diferentes datas previamente agendadas. Como as fábricas têm capacidades de produção limitadas (máquinas, mão-de-obra e outros), é necessário planejar a produção, isto é, decidir o que e quanto produzir (em outras palavras, dimensionar os lotes da produção) em cada período de um horizonte de planejamento. A necessidade de antecipação da fabricação de produtos (estocados de um período para o outro) acarreta em custos de estocagem e algumas dificuldades operacionais. No planejamento da produção, deseja-se determinar o tamanho dos lotes de produção, para atender a demanda na data solicitada e de modo que a soma dos custos de produção e estocagem seja mínima.

Problema de Dimensionamento de Lotes - Monoestágio

Considere uma fábrica que produz n produtos e deseja planejar sua produção para os próximos T períodos de tempo. São conhecidos:

- d_i - A demanda de cada item i em cada período t é conhecida.
- Podemos estocar no final de cada período (I_{it}).
- cap_t - quantidade disponível do recurso t .
- A produção de cada produto i requer quantidade conhecida de cada recurso a_i .
- Os recursos são renováveis (por período).
- c_{it} - custo de fabricar uma unidade do produto i no período t .
- h_{it} - custo de estocar uma unidade do produto i no final do período t .

Problema de Dimensionamento de Lotes - Monoestágio

Variáveis de Decisão:

- x_{it} - quantidade do produto i fabricado no período t .
- I_{it} - quantidade do produto i estocada no final do período t .

Objetivo: Determinar o plano de produção dos n produtos de maneira a minimizar os custos de produção e estoque.

Problema de Dimensionamento de Lotes - Monoestágio - modelo matemático

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (c_{it}x_{it} + h_{it}l_{it}) \\ \text{Sendo:} \quad & \begin{cases} x_{it} + l_{i,t-1} = d_{it} + l_{it}, t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n a_i x_{it} \leq Cap_t, t = 1, \dots, T \\ x_{it} \geq 0, l_{it} \geq 0 t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

e se aceitamos atrasos na entrega (backlogging) ?

$$l_{it} = l_{it}^+ - l_{it}^-, l_{it}^+ \geq 0, l_{it}^- \geq 0$$

Problema de Dimensionamento de Lotes - Multi-estágio

- Em muitos casos, a produção de um item necessita a produção anterior de um outro item (computador - placa mãe).
- Podemos estocar no final de cada período (I_{it}).
- Itens intermediários podem ter demanda exterior (ex. teclado).

Problema de Dimensionamento de Lotes - Multi-estágio

A produção de cada produto j requer quantidade conhecida de cada recurso i - item sucessor de i - quantidade dada por: r_{ij} .

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (c_{it}x_{it} + h_{it}l_{it}) \\ &\text{Sendo:} \quad \begin{cases} x_{it} + l_{i,t-1} = d_{it} + \sum_{j \in S_i} r_{ij}x_{jt}, t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n a_i x_{it} \leq Cap_t, t = 1, \dots, T \\ x_{it} \geq 0, l_{it} \geq 0 t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

O Problema de Dimensionamento de Lotes

O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES Exercício
Livro Pesquisa Operacional - página 29

Introdução

- Empresas fabricam diversos tipos de produtos;
- Produtos demandados por clientes em datas específicas;
- Fábricas com capacidade limitada de produção;
- Antecipação na produção acarreta custos de estocagem estoque;

Exemplo - Fábrica de pré-moldados

- Fabricar dois tipos de vigas com demandas conhecidas para três semanas

Demanda de vigas	Período 1	Período 2	Período 3
Item 1	100	90	120
Item 2	40	50	80

Exemplo - Fábrica de pré-moldados

Suponha a disponibilidade de 40 horas de trabalho por período

- produzir 1 unidade do item 1 consome 15 minutos
- produzir 1 unidade do item 2 consome 20 minutos

Custo de produção são conhecidos:

Custos de produção	Período 1	Período 2	Período 3
Item 1	20	20	30
Item 2	20	20	30

Exemplo - Fábrica de pré-moldados

Admite-se estocar a produção para ser utilizada nos períodos seguinte com os seguintes custos:

Custo de Estoque	Período 1	Período 2
Item 1	2	3
Item 2	2,5	3,5

Exemplo - Fábrica de pré-moldados

- **Objetivo:** determinar o tamanho dos lotes para produção, atendendo a demanda na data com custos de produção e estocagem mínimos.

Variáveis de decisão:

x_{it} = quantidade da vida tipo i produzida no período t .

l_{it} = quantidade da vida tipo i estocada no final do período t .

Modelo Matemático

Modelo Matemático:

$$\begin{aligned} \min f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}) = \\ 20x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 20x_{22} + 30x_{23} + 2l_{11} + 3l_{12} + 2,5l_{21} + 3,5l_{22} \end{aligned}$$

$$x_{11} - l_{11} = 100$$

$$x_{12} + l_{11} - l_{12} = 90$$

$$x_{13} + l_{12} = 120$$

$$x_{21} - l_{21} = 40$$

$$x_{22} + l_{21} - l_{22} = 70$$

$$x_{23} + l_{22} = 80$$

$$1/4x_{11} + 1/3x_{21} \leq 40$$

$$1/4x_{12} + 1/3x_{22} \leq 40$$

$$1/4x_{13} + 1/3x_{23} \leq 40$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22} \geq 0$$

Exercícios

1) Uma empresa de barcos precisa determinar quantos veleiros devem ser produzidos durante cada um dos 4 próximos trimestres. A demanda de cada um dos trimestres é: primeiro trimestre, 40 veleiros; segundo trimestre, 60 veleiros; terceiro trimestre, 75 veleiros; quarto trimestre, 25 veleiros. A empresa quer atender a demanda prontamente. No início do primeiro trimestre, a empresa tem 10 veleiros em estoque. No início de cada trimestre, a empresa precisa decidir quantos veleiros devem ser produzidos durante o trimestre. Por simplicidade, assume-se que os veleiros fabricados durante um trimestre podem ser usados para atender a demanda deste trimestre. Durante cada trimestre, a empresa pode produzir até 40 veleiros com sua mão de obra regular a um custo de \$ 400 por veleiro. Tendo de trabalhar com horas extras durante o trimestre, a empresa pode produzir veleiros a mais a um custo total de \$ 450 por barco. No final de cada trimestre (após ter ocorrido a produção e a demanda do trimestre ter sido atendida), um custo de armazenagem de \$ 20 por barco ocorre. Usar a programação linear para determinar um modelo matemático que determine o programa de produção mensal de modo a minimizar a soma dos custos de produção e estoques durante os 4 próximos trimestres.

Exercícios

2) Uma companhia de aviação agrícola, que opera a partir de um determinado terminal, tem 8 aviões do tipo I, 15 aviões do tipo II e 11 aviões do tipo III, disponíveis para vôos. As capacidades de pesticidas para pulverização, em toneladas, são 45 (ton) para o tipo I, 7 (ton) para o tipo II e 5 (ton) para o tipo III. A companhia deve expedir aviões para as propriedades A e B. As necessidades de tonelagem são 20 (ton) na propriedade A e 28 (ton) na propriedade B. Sabe-se também que o excesso de pulverização de uma propriedade deve ser evitado, e que um avião pode voar somente uma vez durante o dia. O custo de enviar um avião do terminal a cada propriedade, em \$, é dado pela seguinte tabela. Formule um modelo matemático que pode ser utilizado para determinar o número de aviões a ser enviado para cada propriedade de modo a minimizar os custos.

Propriedade	Avião do tipo I	Avião do tipo II	Avião do tipo III
A	23	15	1,4
B	58	20	3,8

O Problema de Programação de Projetos

O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DE PROJETOS - Livro
Pesquisa Operacional - página 34

Introdução

- Tarefas competem por recursos e possuem precedência.
- Uma tarefa dura um certo tempo.
- Um projeto pode ter inúmeras tarefas.
- Deseja-se saber a ordem de um conjunto de tarefas de tal forma a obter o menor tempo para conclusão do projeto.

Aplicações

- Construção de edifícios, pontes, estradas;
- Planejamento da produção de produtos sob encomenda;
- Desenvolvimento de pesquisas.

Exemplo - Construção de um pilar

- Construir pilares de uma edificação.
- Para a construção do pilar existem oito atividades básicas.
- Algumas atividades (tarefas) possuem predecessores.
- **Objetivo:** determinar o menor tempo necessário para que todas as oito atividades sejam concluídas.
- Considere os dados na Tabela a seguir.

Dados do problema

Atividade	Descrição	Pred.	Duração (h)
A	Preparo da armadura	-	6
B	Preparo da forma	-	5
C	Lançamento da armadura	A	4
D	Lançamento da forma	B,C	2
E	Providências para concretagem	-	2
F	Aplicação do concreto	E,D	3
G	Cura do concreto	F	72
H	Desforma do pilar	G	3

O que decidir?

- Decidir o instante mais cedo que as atividades podem ser iniciadas.
- Define-se a variável de decisão t_i , $i = A, B, C, D, E, F, G, H$, o instante mais cedo em que a atividade i pode ser iniciada e que o início do projeto no instante $t = 0$.
- Observe que o projeto não pode ser concluído antes do instante $t_H + 3$. Assim o objetivo consiste em minimizar $t_H + 3$.
- Os instantes mais cedo em que uma tarefa deve ser inicializada devendo das relações de precedência.

Resolução do Exemplo

$$\min f(t_A, t_B, \dots, t_H) = t_H + 3$$

Sujeito a: $t_A \geq 0$

$$t_B \geq 0$$

$$t_C \geq t_A + 6$$

$$t_D \geq t_B + 5$$

$$t_D \geq t_C + 4$$

$$t_E \geq 0$$

$$t_F \geq t_E + 2$$

$$t_G \geq t_F + 3$$

$$t_H \geq t_G + 72$$

Problema de meio ambiente

PROBLEMA DE MEIO AMBIENTE - Página 37

Introdução

- Problemas ambientais têm um forte apelo social, uma vez que a preservação do meio ambiente está ligada à melhoria da qualidade de vida da população.
- Infelizmente, existem poucos trabalhos na literatura relacionados a problemas ambientais e pouca pesquisa tem-se destinado a esse tema.
- Exemplos de problemas ambientais que podem ser formulados por técnicas de programação matemática: corte sustentável de árvores, poluição de recursos naturais, tratamento de água/esgoto, controle biológico de pragas, rotação de culturas, entre outros.

Um exemplo: Problema de tratamento de água

- Uma empresa desvia parte da água de um rio para ser utilizado em seu processo produtivo.
- Durante a produção, componentes químicos poluidores A e B são adicionados à água desviada, a qual retorna ao rio ao final da produção.
- A água desviada não tratada polui o rio e deixa a água com níveis intoleráveis (e até letais) de poluentes.
- Considera-se que o processo produtivo não acarreta mudanças no fluxo de água e a adição dos poluentes não afeta o volume de água.

Um exemplo: Problema de tratamento de água

- Concentrações aceitáveis dos poluentes A e B são a_0 e b_0 gramas por ML (milhões de litros) de água por dia;
- Vazão do rio é de V ML por dia e a fábrica precisa de U ML de água por dia para a sua produção.
- Existem 3 tipos de tratamento de água que a empresa pode utilizar para diminuir a concentração dos poluentes. Cada um deles tem um custo diferente e resultam em níveis de concentração distintos, conforme a próxima tabela.

Problema de tratamento de água

- a_1 é a quantidade do componente A após o tratamento 1 de 1ML de água poluída;

Tratamento	1	2	3
A	a_1	a_2	a_3
B	b_1	b_2	b_3
Custo/ML	c_1	c_2	c_3

Problema de tratamento de água

O problema consiste em determinar a quantidade de água a ser tratada em cada tipo de tratamento, de modo que as exigências ambientais sejam satisfeitas e o custo total de tratamento seja mínimo.

Descrição do problema

Dados:

- a_i = quantidade do componente A na água após o tratamento i , $i = 1, 2, 3$;
- b_i = quantidade do componente B na água após o tratamento i , $i = 1, 2, 3$;
- c_i = custo/ML do tratamento i , $i = 1, 2, 3$;
- U = quantidade de água que a empresa precisa por dia para a sua produção (em ML);
- V = vazão diária do rio (em ML);

Variáveis de decisão:

- x_i = quantidade de água tratada diariamente segundo o tratamento i , $i = 1, 2, 3$.

Modelo matemático

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 c_i x_i$$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq U$ – água desviada deve ser no mínimo U ;

$x_1 + x_2 + x_3 \leq V$ – água desviada não pode ultrapassar a vazão do rio V ;

$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)/V \leq a_0$ – concentração máxima aceitável de poluente A;

$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)/V \leq b_0$ – concentração máxima aceitável de poluente B;

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ – não-negatividade das variáveis.

Problemas de Gestão Financeira

PROBLEMA DE GESTÃO FINANCEIRA - Página 35

Introdução

- O Fluxo de Caixa é um instrumento de gestão que diz respeito à quantidade de dinheiro que entra e sai da empresa, em um período de tempo (diário, semanal, mensal etc);
- Estes problemas podem ser vistos como um objeto matemático com o objetivo de facilitar o estudo e os efeitos da análise de uma certa aplicação, que pode ser um investimento, empréstimo, financiamento, etc;
- Modelos lineares também podem ser utilizados para apoiar decisões em problemas de gestão financeira, por exemplo, no gerenciamento do fluxo e caixa.

Empresas

- Maximizar lucro da da empresa otimizando o fluxo



Formulação Matemática

Considere uma empresa que gostaria de maximizar o retorno de seu fluxo de caixa ao final e um horizonte de planejamento de n períodos. A empresa tem boas previsões de fluxo de entrada e saída de caixa no início de cada período.

Dados:

- e_t : entrada de caixa no início do período t , $t = 1, \dots, n$
- s_t : saída de caixa no início do período t , $t = 1, \dots, n$

Formulação Matemática

Opções de investimento disponíveis para o dinheiro do caixa no início de cada período:

- (1) Deixar parte ou todo dinheiro no próprio caixa durante todo período, com taxa de juros α
- (2) Utilizar parte ou todo dinheiro em uma aplicação financeira com menor liquidez do que a opção 1 (isto é, resgate restrito), porém com taxa de juros $\beta, \beta > \alpha$

Formulação Matemática

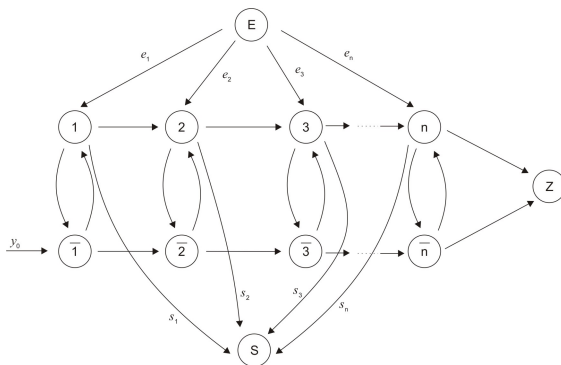
As conversões entre as opções 1 e 2 podem ser realizadas apenas do início de cada período t .

Custo unitário de conversão:

- $c_{1,2}$ da opção 1 para a opção 2.
- $c_{2,1}$ da opção 2 para a opção 1.

Este problema é representado em uma rede de fluxos de dinheiro.

Representação gráfica do fluxo de caixa



Objetivo: maximizar a soma dos fluxos de dinheiro de n e $\bar{n}$ para Z .

Formulação Matemática

Modelos lineares também podem ser utilizados para apoiar decisões em problemas de gestão financeira, por exemplo, no gerenciamento do fluxo e caixa.

Variáveis de decisão:

- f_{ij} : fluxo de dinheiro do nó i para o nó j

O fluxo de dinheiro ocorre entre nós específicos:

- de i para $i + 1$
- de i para $\bar{i}$.

Exemplo

- Se $i = 1$ e $j = 2$ então f_{12} é a quantia em dinheiro mantida em caixa no período 1, que corresponde a uma entrada de caixa no período 2 de $(1 + \alpha)f_{12}$;
- Se $i = \bar{1}$ e $j = \bar{2}$ então $f_{\bar{1}\bar{2}}$ é a quantia mantida na opção 2 no período 1, de modo que a quantia $(1 + \beta)f_{\bar{1}\bar{2}}$ estará aplicada no período

Exemplo

O total aplicado na opção 2 no período 2 é além da quantia $(1 + \beta)f_{12}$, também a quantia $(1 - c_{1,2})f_{22}$, menos a quantia resgatada no período 2, dada por f_{22} .

$$(1 + \beta)f_{12} + (1 - c_{1,2})f_{22} = f_{22} + f_{23}$$

A quantia f_{23} é vista como que saindo do nó $\bar{2}$ para cada um dos nós na rede de fluxos. Equação de balanço de fluxo:

- similar a equação ??.
- No final do planejamento, o fluxo entrando no nó Z deve ser maximizado:

$$(1 + \alpha)f_{n,Z} + (1 + \beta)f_{\bar{n},Z}$$

Modelo matemático: Problema de fluxo de caixa

Maximizar $(1 + \alpha)f_{n,Z} + (1 + \beta)f_{\bar{n},Z}$

$$e_1 + (1 - c_{1,2})f_{\bar{1},1} = f_{1,2} + f_{1,\bar{1}} + s_1 \quad \text{nó } 1$$

$$y_0 + (1 - c_{1,2})f_{1,\bar{1}} = f_{\bar{1},2} + f_{\bar{1},1} \quad \text{nó } \bar{1}$$

$$e_2 + (1 + \alpha)f_{1,2} + (1 - c_{2,1})f_{\bar{2},2} = f_{2,3} + f_{2,\bar{2}} + s_2 \quad \text{nó } 2$$

$$(1 + \beta)f_{\bar{1},2} + (1 - c_{1,2})f_{2,\bar{2}} = f_{\bar{2},3} + f_{\bar{2},2} \quad \text{nó } \bar{2}$$

...

$$e_n + (1 + \alpha)f_{n-1,n} + (1 - c_{2,1})f_{\bar{n},n} = f_{n,Z} + f_{n,\bar{n}} + s_n \quad \text{nó } n$$

$$(1 + \beta)f_{\bar{n}-1,\bar{n}} + (1 - c_{1,2})f_{n,\bar{n}} = f_{\bar{n},Z} + f_{\bar{n},n} \quad \text{nó } \bar{n}$$

$$f_{i,j} \geq 0, \text{ para todo } i,j.$$

Exemplo

Considere um horizonte e planejamento de $n = 3$ períodos, com os seguintes fluxos de entrada e saída de caixa:

- $e_1 = \$12, e_2 = \$8, e_3 = \$5$;
- $s_1 = \$4, s_2 = \$10, s_3 = \$10$.

Opções de investimento da empresa:

- (i) Deixar o dinheiro em caixa e aplica-los em fundos de investimento de curto prazo, com expectativa de rendimento de 5% do valor investido por período;
- (ii) Aplicar em títulos públicos com rendimento pré-fixado de 8% do valor investido por período.

Exemplo

- As transações de aplicação e resgate tem custo unitário e 2% do valor aplicado ou resgatado.
- Aplicações e resgates só podem ser feitos ao fim de cada período.

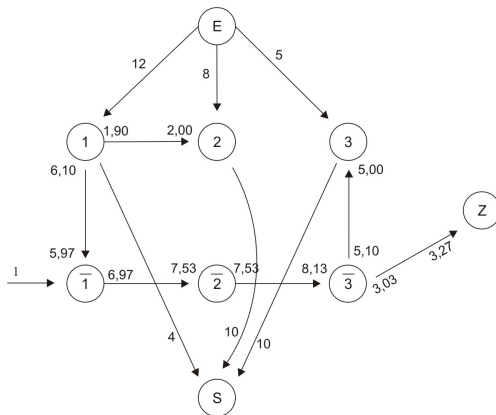
A empresa já dispõe de \$1 em títulos públicos, disponível para resgate.

Objetivo: Determinar quanto aplicar e resgatar no início de cada período, e maneira a maximizar o retorno do caixa no final do horizonte de planejamento.

Exemplo

Como $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,08$, $c_{1,2} = c_{2,1} = 0,02$ e $y_0 = \$1$

Solução ótima do exemplo:



Exemplo

O problema consiste em:

- (i) Aplicar \$6,10 do caixa, mais o investimento inicial de \$1, em títulos públicos no período 1;
- (ii) Não aplicar nada do caixa em títulos, nem resgatar nada dos títulos para o caixa, deixando \$7,53 aplicados em títulos no período 2;
- (iii) Resgatar \$5,10 dos títulos para os caixas no período 3, deixando \$3,03 aplicados em títulos no período 3. O retorno final do período 3 é \$3,27 (aplicados em títulos).

Referências Bibliográficas

- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Campus/elsevier, 2007. 523 p. ISBN 10-85-352-145-1454-2.
- GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L.; **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Campus, 2000.
- PERIN, C. **Introdução à Programação Linear**. Coleção Imecc - Textos Didáticos. V.2. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001. 177p.