

PIPGes ICMC – USP/UFSCar
EST5102 – Inferência Estatística – 2026/1
3ª lista de exercícios

1. Considere $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de cada uma das distribuições abaixo. Apresente os respectivos estimadores de máxima verossimilhança.
 - (a) $\text{gama}(\alpha, \beta)$, α conhecido,
 - (b) $\text{gama}(\alpha, \beta)$, β conhecido,
 - (c) $\text{gama}(\alpha, \beta)$ e
 - (d) $\text{beta}(\alpha, \beta)$.
2. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}([- \theta, \theta])$, $\theta > 0$.
 - (a) Apresente um estimador de θ pelo método de máxima verossimilhança.
 - (b) Apresente um estimador de θ pelo método dos momentos.
3. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$, $\theta \in \mathbb{R}$. Apresente um estimador de θ pelo método de máxima verossimilhança. Existe um único estimador?
4. Sendo $X_1 \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, prove que não existem estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ^2 .
5. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(\cdot; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$, $0 < \theta \leq 1/2$. Apresente (e comente) estimadores de θ utilizando os métodos dos momentos e de máxima verossimilhança.
6. Suponha que tempos de falha de um componente (X , em meses) seguem distribuição exponencial(θ). Foi coletada uma amostra aleatória de $X_1, \dots, X_n$.
 - (a) Apresente dois estimadores de θ pelo método dos momentos.
 - (b) Apresente o estimador de máxima verossimilhança de $P_\theta(X_1 \geq 1)$.
7. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(\cdot; \boldsymbol{\theta})$, em que $f(x; \boldsymbol{\theta}) = \sigma^{-1} \exp\{-(x - \mu)/\sigma\} I_{[\mu, \infty)}(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)^\top$.
 - (a) Encontre estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ .
 - (b) Proponha um estimador para $P_{\boldsymbol{\theta}}(X_1 \geq t)$, $t > \mu$.
8. Sejam $X_1, \dots, X_m \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\mu_X, \sigma^2)$ e $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\mu_Y, \sigma^2)$ amostras independentes. Encontre estimadores de máxima verossimilhança de μ_X , μ_Y e σ^2 .

9. Considere $X_i \stackrel{\text{indep.}}{\sim} \text{normal}(\mu, \sigma^2 + a_i)$, $a_i > 0$, a_i conhecida, $i = 1, \dots, n$.
- Proponha estimadores de μ e σ^2 pelos métodos dos momentos e de máxima verossimilhança.
 - Aplique os resultados do item anterior aos dados da amostra

$$\mathbf{x} = (4, 2; 5, 7; 5, 3; 9, 6; 14, 0; 7, 1; 14, 9; 9, 1; 4, 6; 1, 3; 8, 4; 4, 1; 6, 1; 3, 0; 9, 9; 4, 1; 9, 7; 12, 4; 11, 4; 4, 9)^\top,$$
 sendo que

$$\mathbf{a} = (2, 7; 1, 5; 3, 6; 2, 9; 0, 9; 3, 1; 4, 7; 3, 8; 2, 1; 2, 1; 3, 0; 4, 2; 5, 9; 3, 6; 3, 1; 2, 5; 3, 2; 0, 9; 4, 3; 2, 9)^\top.$$
10. Uma amostra aleatória é obtida de uma distribuição $\text{Poisson}(\theta)$, mas os valores nulos não são registrados. Dizemos que a distribuição é truncada na origem ou em 0.
- Apresente um estimador de θ por máxima verossimilhança.
 - Com base nas observações $\mathbf{x} = (5, 7, 2, 6, 3, 2, 4, 4, 1, 5)^\top$, apresente uma estimativa para θ .
11. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\theta, |\theta|)$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Apresente o estimador de máxima verossimilhança de θ .
 - Apresente estimadores de momentos para θ usando os dois primeiros momentos.
 - Selecione o verdadeiro valor de θ ($= \theta_0$) e o tamanho da amostra, gere uma amostra aleatória, represente graficamente a função log-verossimilhança $\ell(\theta)$ e verifique a solução obtida no item 11a.