

4ª Lista de Exercícios - SME0820 Análise de Regressão - 03/06/2014

Exercício 1. Considere os dados de consumo de combustível em estados norte-americanos, disponíveis no arquivo `Combustivel.txt`, com

Y : consumo de combustível (galões por pessoa),

X_1 : o imposto sobre combustível (centavos de dólar/galão),

X_2 : o percentual da população com carteira de habilitação,

X_3 : a renda per capita (milhares de dólares) e

X_4 : a quantidade de estradas federais pavimentadas (em milhares de milhas).

- Ajuste um modelo de regressão linear múltipla, relacionando o consumo de combustível com as 4 covariáveis.
- Avalie a significância da regressão.
- Obtenha o coeficiente de determinação do modelo R^2 .
- Implemente medidas diagnósticas em R e verifique a presença de pontos aberrantes, de alavanca ou influentes. Se houver observações com essas características, identifique-as e verifique possíveis motivos para essa classificação.
- Considerando o método passo atrás (backward), obtenha o melhor modelo.

Exercício 2. Considere o modelo de regressão linear múltipla,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon},$$

com $\underline{Y}_{n \times 1}$ um vetor aleatório, $X_{n \times (p+1)}$ uma matriz conhecida de covariáveis, $\underline{\beta}_{(p+1) \times 1}$ um vetor de parâmetros desconhecidos e $\underline{\epsilon}$ um vetor de erros com distribuição normal multivariada $N_n(\underline{0}, \sigma^2 I_n)$ e $\hat{\underline{\epsilon}}$ o vetor de resíduos do modelo ajustado. Mostre que

- $r(\hat{\underline{\epsilon}}, \underline{Y}) = \sqrt{1 - R^2}$, com r o coeficiente de correlação amostral. Conclua que não é adequado utilizar o gráfico de $\hat{\underline{\epsilon}} \times \underline{Y}$ na análise de resíduos.
- Mostre que o coeficiente angular do ajuste de mínimos quadrados de $\hat{\underline{\epsilon}}$ em $\underline{Y}$ é $(1 - R^2)$.
- Mostre que $r(\hat{\underline{\epsilon}}, \hat{\underline{Y}}) = 0$.

Exercício 3. Considere o modelo de regressão linear simples sem intercepto e com erros heteroscedásticos e não correlacionados,

$$(1) \quad \begin{cases} Y_i = \beta X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \text{ com} \\ E(\epsilon_i) = 0, \quad \text{Var}(\epsilon_i) = \sigma_i^2, \quad \sigma_i^2 = (a + bX_i^2)\sigma^2, \end{cases}$$

com a e b constantes conhecidas.

- Interprete o modelo (1).
- Obtenha o estimador de mínimos quadrados de β para o caso em que $a = 0$ e $b = 1$. Verifique se esse estimador é não viesado e calcule sua variância.
- Repita o item (b) para o caso em que $a = 0$ e $b = \sigma^{-2}$.
- Interprete o modelo para o caso em que $a \neq 0$ e $b = 1$.

Exercício 4. Considere o modelo de regressão linear múltipla,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon},$$

com $\underline{Y}_{n \times 1}$ um vetor de variáveis resposta, $X_{n \times (p+1)}$ uma matriz conhecida de covariáveis, $\underline{\beta}_{(p+1) \times 1}$ um vetor de parâmetros desconhecidos e $\underline{\epsilon}$ um vetor de erros com $E(\underline{\epsilon}) = \underline{0}$ e $\text{Var}(\underline{\epsilon}) = \sigma^2 V$, com V uma matriz diagonal conhecida, positiva definida e diferente da identidade.

(a) Verifique se

$$\frac{\underline{Y}'V^{-1}\underline{Y} - \underline{Y}'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\underline{Y}}{n - p - 1}$$

é um estimador não viesado de σ^2 . (Dica: escreva a expressão como uma forma quadrática).

(b) Obtenha o resultado particular análogo para o modelo de regressão linear simples.

Exercício 5. Considere o modelo de regressão linear simples sem intercepto e com erros heteroscedásticos e não correlacionados, $Y_i = \beta X_i + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, com $E(\epsilon_i) = 0$, $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma_i^2$ e $\sigma_i^2 = X_i^2 \sigma^2$.

(a) Apresente uma transformação que estabiliza a variância dos erros. Justifique.

(b) Obtenha um estimador não viesado para β e calcule sua variância.

(c) Verifique se $\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i}{X_i} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i} \right)^2 / n \right]$ é um estimador não viesado de σ^2 .

Exercício 6. Considere o modelo de regressão linear simples

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \text{ com } \epsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

(a) Mostre que os elementos da matriz chapéu (*hat matrix*) são dados por

$$h_{ij} = \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})}{S_{XX}} \text{ e } h_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{S_{XX}}$$

(b) Discuta o comportamento de h_{ii} quando X_i está distante de $\bar{X}$.

Exercício 7. Explique com suas palavras o que significa análise de diagnóstico. Você deve incluir na discussão análises de resíduos, identificação de pontos aberrantes, influentes e de alavanca. Dê exemplos.

Exercício 8. Explique o que é multicolinearidade. Dê exemplos e apresente possíveis soluções.

Exercício 9. Explique a utilidade e necessidade da seleção de modelos.

Exercício 10. Para cada um dos modelos abaixo, verifique se corresponde a um modelo linear ou se existe uma transformação conveniente que o linearize.

(a) $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 \log_{10} X_2 + \beta_3 X_1^2 + \epsilon$

(b) $Y = \epsilon(e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2^2})$

(c) $Y = \beta_0 e^{\beta_1 X_1} + \epsilon$

(d) $Y = [1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \epsilon}]^{-1}$