

Programação Matemática

Maristela Santos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

Forma Padrão - Definição

Minimizar $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

■ Características da forma padrão:

- ✓ Problema de minimização
- ✓ Todas as restrições são de igualdade
- ✓ Todas as variáveis são não-negativas
- ✓ Considerar $b \geq 0$.

Partição básica

$$A = [B \ N]$$

- Seja $Ax=b$, onde $A_{m \times n}$, $b_{m \times 1}$, $x_{n \times 1}$ ($m < n$).
- Se é possível reorganizar as colunas de A de tal modo $A=[B,N]$ e que:
- $B_{m \times m}$ é formada por m colunas linearmente independentes de A dada por: $B = [a_{B_1} \ a_{B_2} \ \cdots \ a_{B_m}]$
Onde $B_1, B_2, \dots, B_m$ são os índices das colunas escolhidas da matriz A (índices básicos)

Partição básica

- $N_{m \times (n-m)}$ - formada pelas $n-m$ colunas restantes de A .

- N pode ser escrita como:

Onde $N_1, N_2, \dots, N_m$ são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N (índices não-básicos)

$$N = [a_{N_1} \ a_{N_2} \ \cdots \ a_{N_{n-m}}]$$

Esta reorganização é definida como partição básica

$$A = [B \ N]$$

Partição básica (partição das variáveis)

- Consequentemente, a partição de A em [B N] cria uma partição das variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{variáveis básicas} \\ \text{variáveis não básicas} \end{matrix}$$

Solução geral do sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{BN}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx}_N$$

- A última expressão de $\mathbf{x}_B$ é conhecida como solução geral do sistema.

Solução básica

- Considere uma partição básica $A=[B,N]$. Uma solução é dita básica quando:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- Se $x_B \geq 0$ então temos uma *solução básica factível*. Caso contrário, temos uma *solução básica não-factível*.
- Se $x_B > 0$ dizemos que a solução básica factível é não degenerada.

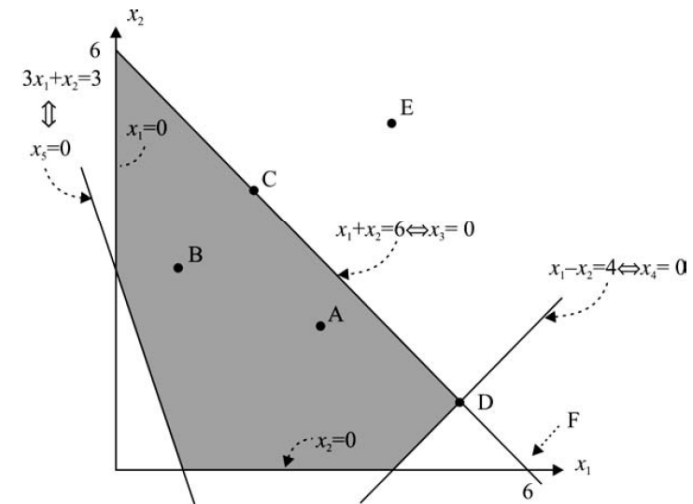
Voltando ao exemplo

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 \leq 6 \\ x_1 & - & x_2 \leq 4 \\ 3x_1 & + & x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Solução básica factível



Voltando ao exemplo

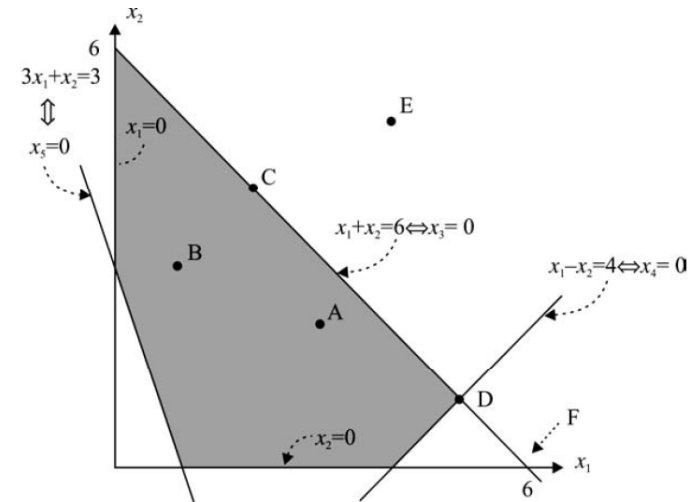
- Vértice F:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Solução básica *não*-factível



Propriedades

Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo

Considere a região factível $S = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } Ax = b, x \geq 0\}$.
Um ponto $x \in S$ é um vértice se e somente se x for uma solução básica factível.

Método possível

- Enumerar todas as soluções básicas factíveis (vértices)

$x_1, x_2, \dots, x_K$

- Escolher aquela com melhor função objetivo.
 - Problema:
K pode ser muito grande!
-

Simplex

Idéia:

- Partir de uma solução básica factível
- Visitar apenas as soluções básicas factíveis melhores que ela.

Método Simplex

Simplex

In this chapter we begin to discuss Dantzig's Simplex Method, which was conceived in the summer of 1947 for solving linear programming problems. The first significant application of this method occurred soon after in the fall of 1947. J. Laderman solved a diet-planning linear program with nine equality constraints in 27 nonnegative variables at the National Bureau of Standards. Using desk calculators, this problem took 120 man-days to solve and the worksheets were laboriously glued together and spread out like a "table cloth." Today, using modern-age computer facilities and sophisticated implementations of the simplex method, linear programs having more than tens-of-thousands of constraints and variables are readily solvable. Although several variants of the simplex method have evolved and other new competing algorithms have been proposed (see Chapter 8), the simplex method remains a viable and popular tool for solving linear programming problems. It also provides further insights into the facial structure of polyhedral sets that define the underlying feasible region for linear programs.

Perguntas

- Dada uma solução básica factível (ou seja, um vértice)
 - 1) Esta solução é ótima ?
 - 2) Caso não seja ótima, como encontrar uma solução básica factível melhor ?
-

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- Considere uma solução básica factível:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_B \\ \hat{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- E a solução geral do sistema usando a mesma partição :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- A função objetivo pode ser expressa considerando a partição básica:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \rightarrow Bx_B + Nx_N = b. \longrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$f(x) = c^T x = \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T \underbrace{(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N)}_{x_B} + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N. \end{aligned}$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T \underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ &= \underbrace{\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}}_{f(\hat{\mathbf{x}})} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N. \end{aligned}$$

valor da solução básica associada a esta partição

- Então

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N.$$

$$\lambda^T$$

$$\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

- Definição (vetor multiplicador simplex): O vetor $\lambda_{m \times 1}$, dado por:

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$$

é chamado vetor multiplicador simplex (ou também, vetor de variáveis duais).

O vetor multiplicador simplex pode ser obtido por:

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \left(B^{-1}\right)^T c_B \Leftrightarrow B^T \lambda = c_B$$

Retornando ... Pergunta 1: A solução atual é ótima ?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = f(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N} \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}) \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

Vamos expressar por coluna:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N} &= (c_{N_1}, c_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}}) - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}_{N_2}, \dots, \mathbf{a}_{N_{n-m}}) \\ &= (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1}, c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}}) \\ \mathbf{x}_N &= (x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_{n-m}}) \end{aligned}$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \dots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}$$

Custos relativos

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \dots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}$$

Definição: Os coeficientes $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$ das variáveis não-básicas na função objetivo descrito acima são chamados custos relativos ou custos reduzidos.

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \longrightarrow$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1}x_{N_1} + \hat{c}_{N_2}x_{N_2} + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}}x_{N_{n-m}}$$

Exemplo (Arenales et al, 2.22)

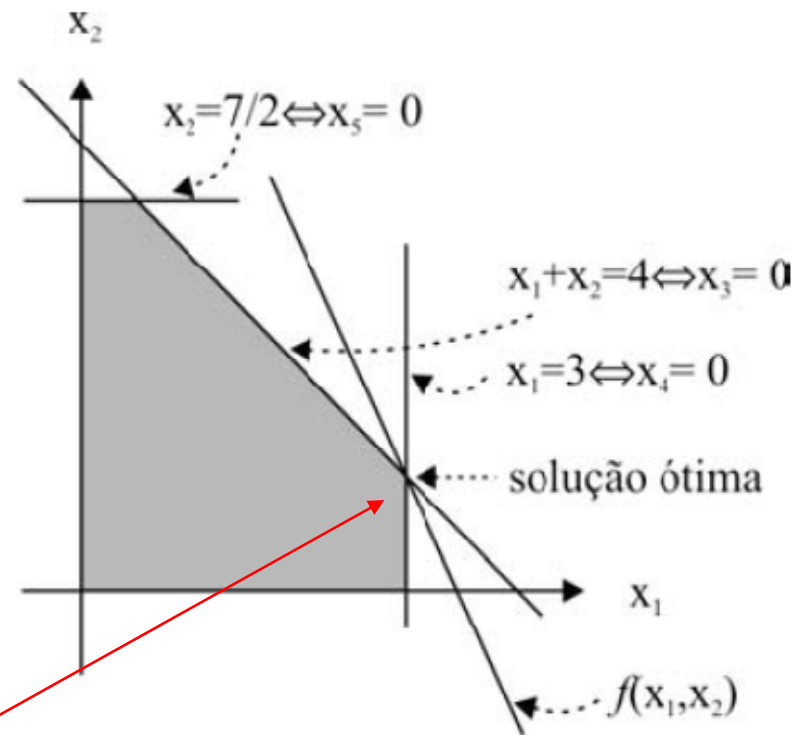
- Considere o problema:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar } f(x_1, x_2) &= -2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq \frac{7}{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

reescrito na forma padrão:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= \frac{7}{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0.\end{aligned}$$

- Resolução gráfica:



Intersecção das retas:
 $x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 = 3$

$$x_1^* = 3$$

$$x_2^* = 1$$

$$f(\mathbf{x}^*) = -7$$



- $x_1 + x_2 = 4$

(variável de folga associada: x_3)

- $x_1 = 3$

(variável de folga associada: x_4)

Logo, o vértice (solução básica) deve ser obtido com a partição:

$$B = (1,2,5) , \quad N = (3,4)$$


- Atribuindo zero às variáveis não-básicas:

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\
 x_1 & + & x_4 = 3 \\
 & x_2 & + x_5 = \frac{7}{2}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 & = & 4 \\
 x_1 & = & 3 \\
 & x_2 + x_5 & = \frac{7}{2}
 \end{array}$$

$x_1^* = 3, x_2^* = 1, x_5^* = \frac{5}{2}$
 $(x_3^* = x_4^* = 0)$

Todos positivos: solução básica factível.

- Vamos calcular os custos relativos:

n-m variáveis não-básicas

$$\mathbf{B} = (\underbrace{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3}_{m \text{ variáveis básicas}}) = (1, 2, 5), \quad \mathbf{NB} = (\overbrace{\mathbf{NB}_1, \mathbf{NB}_2}^{n-m \text{ variáveis não-básicas}}) = (3, 4)$$

m variáveis básicas

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \quad \mathbf{a}_{B_2} \quad \mathbf{a}_{B_3}] = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \quad \mathbf{a}_{N_2}] = [\mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_B^T = (c_{B_1} \quad c_{B_2} \quad c_{B_3}) = (c_1 \quad c_2 \quad c_5) = (-2 \quad -1 \quad 0) \\ \mathbf{c}_N^T = (c_{N_1} \quad c_{N_2}) = (c_3 \quad c_4) = (0 \quad 0) \end{array} \right.$$

Vamos calcular os custos relativos

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_j}) \longrightarrow \lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \longrightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (-2 \quad -1 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1 \quad -1 \quad 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \quad \mathbf{a}_{B_2} \quad \mathbf{a}_{B_3}] = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \quad \mathbf{a}_{N_2}] = [\mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_B^T = (c_{B_1} \quad c_{B_2} \quad c_{B_3}) = (c_1 \quad c_2 \quad c_5) = (-2 \quad -1 \quad 0) \\ \mathbf{c}_N^T = (c_{N_1} \quad c_{N_2}) = (c_3 \quad c_4) = (0 \quad 0) \end{array} \right.$$

Vamos calcular os custos relativos

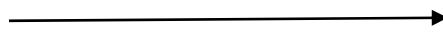
outra maneira de calcular λ^T

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \left(B^{-1}\right)^T c_B \Leftrightarrow B^T \lambda = c_B$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 + \lambda_3 = -1$$

$$\lambda_3 = 0$$



$$\lambda^T = (-1 \ -1 \ 0)$$

Vamos calcular os custos relativos

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_j}) \quad \lambda^T = (-1 \ -1 \ 0)$$

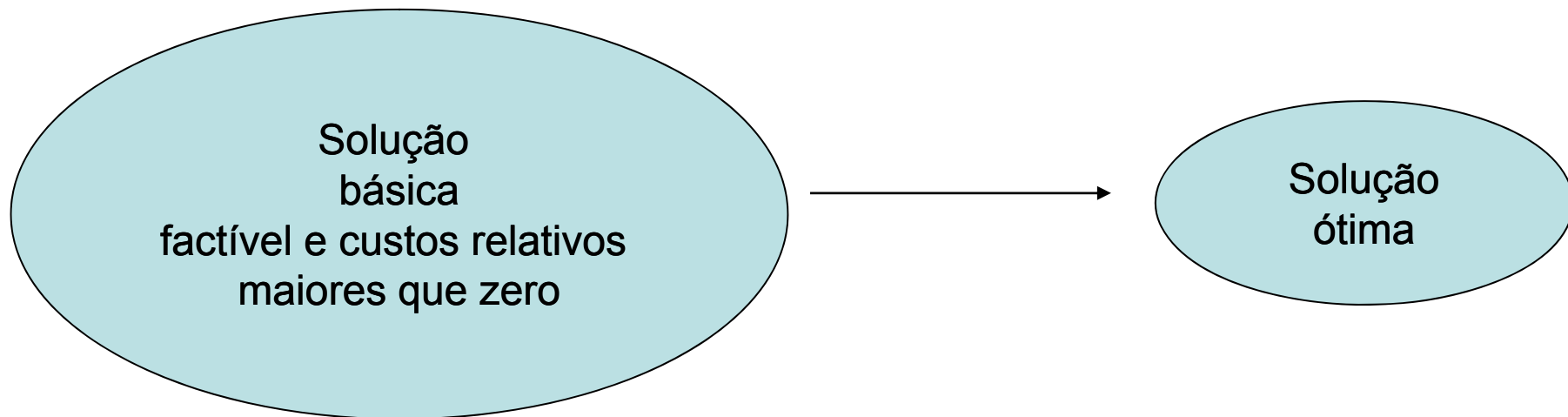
$$j=1: \hat{c}_{N_1} = \hat{c}_3 = c_3 - \lambda^T \mathbf{a}_3 = 0 - (-1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$j=2: \hat{c}_{N_2} = \hat{c}_4 = c_4 - \lambda^T \mathbf{a}_4 = 0 - (-1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Condição de otimalidade

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \dots + (c_{N_{n-m}} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}$$

Propriedade 2.3 (*condição de otimalidade*) Considere uma partição básica $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \mathbf{N}]$ em que a solução básica associada $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (isto é, solução básica factível), e seja $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ o vetor multiplicador simplex. Se $(c_{N_j} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_j}) \geq 0$, $j = 1, \dots, n - m$, (isto é, todos os custos relativos são não-negativos), então a solução básica é ótima.



Resumo

- Já vimos:
 - Soluções básicas estão associadas a vértices (pontos extremos)
 - Se há uma solução ótima, então há um ponto extremo (solução básica) ótima.
 - Podemos definir os custos relativos de variáveis não básicas $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_j})$ $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$
 - Se, em um problema de minimização (maximização), para uma dada solução básica, todos os custos relativos são positivos (negativos), a solução é ótima.

Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?
Respondida (ver último item do slide anterior)
 - 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?
-

A solução não é ótima

- Existe ao menos uma variável não-básica x_{N_k} para a qual:

$$\hat{c}_{N_k} = c_{N_k} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_k} < 0$$

(Ou a propriedade 2.3 estaria atendida e a solução seria ótima).

*problema de minimização

Exemplo

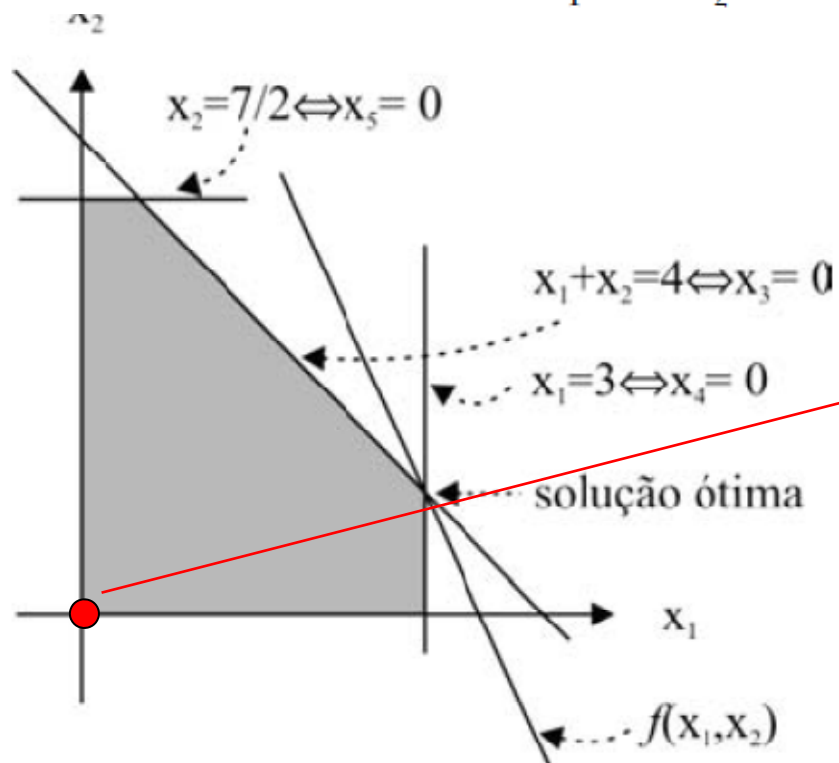
Minimizar $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_4 = 3$$

$$x_2 + x_5 = \frac{7}{2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$



$$N_1 = 1, N_2 = 2$$

$$B_1 = 3, B_2 = 4, B_3 = 5$$

Exemplo

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \quad \mathbf{a}_{B_2} \quad \mathbf{a}_{B_3}] = [\mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \quad \mathbf{a}_{N_2}] = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^T = (c_{B_1} \quad c_{B_2} \quad c_{B_3}) = (c_3 \quad c_4 \quad c_5) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\mathbf{c}_N^T = (c_{N_1} \quad c_{N_2}) = (c_1 \quad c_2) = (-2 \quad -1)$$

-
- *Multiplicador simplex:*

$$\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$$

A solução não é ótima

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_j})$$

$$j = 1: \quad \hat{c}_{N_1} = \hat{c}_1 = c_1 - \lambda^T \mathbf{a}_1 = -2 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$j = 2: \quad \hat{c}_{N_2} = \hat{c}_2 = c_2 - \lambda^T \mathbf{a}_2 = -1 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Estratégia simplex

- Vamos perturbar a solução básica factível de modo a diminuir o valor da função objetivo .
- Definição (estratégia simplex). Chamamos de estratégia simplex a perturbação de uma solução básica factível que consiste em alterar as variáveis não básicas por:

$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ x_{N_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - m, \quad i \neq k. \end{cases}$$

isto é, escolhemos **uma** variável com custo relativo negativo e adicionamos uma pequena perturbação.

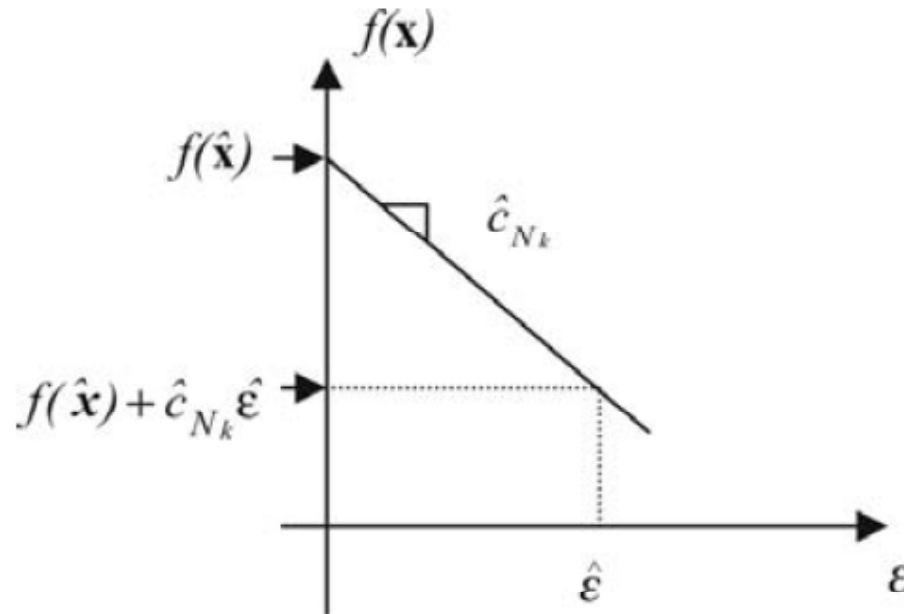
Estratégia simplex

$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ x_{N_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-m, \quad i \neq k. \end{cases}$$

A nova função objetivo vale:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} \underbrace{0}_{x_{N_1}} + \dots + \hat{c}_{N_k} \underbrace{\varepsilon}_{x_{N_k}} + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}} \underbrace{0}_{x_{N_{n-m}}} = \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k} \varepsilon < f(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Resultado na função objetivo



Pergunta: a solução perturbada é factível ?

Sim, se a perturbação é suficientemente pequena e a solução básica original é não degenerada.

qual o maior ε ?

Direção simplex e tamanho do passo

- Mudando as variáveis não-básicas, obrigatoriamente temos que mudar as variáveis básicas:

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_k} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \hat{\mathbf{x}}_B - \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}}_{\mathbf{y}} \varepsilon = \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{y}\varepsilon$$

direção simplex!

Direção simplex e tamanho do passo

Definição 2.9 (*direção simplex*) Chamamos de direção simplex o vetor $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}$, o qual fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. A direção simplex é solução do sistema de equações lineares $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}_{N_k}$.

- As novas variáveis básicas (perturbadas) devem continuar não-negativas:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \hat{\mathbf{x}}_B - \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}}_{\mathbf{y}} \varepsilon = \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{y}\varepsilon$$

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

- A rigor, $\mathbf{d} = (-\mathbf{y}, \mathbf{e}_k)$ é a direção simplex, de modo que a nova solução é $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{d}$,

Direção simplex e tamanho do passo

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

- Temos, pois:

se $y_i \leq 0$, então $x_{B_i} \geq 0$, para todo $\varepsilon \geq 0$

se $y_i > 0$, como $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0$, então, $\varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$

Logo, o maior valor de ε é dado por

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } y_i > 0 \right\}.$$

O que acontece se...

- Se no momento de calcular o passo máximo, todos os y_i são negativos...

... significa que para qualquer valor de ε , a nova solução é factível. Como quanto maior ε , maior o decrescimento da função objetivo, a **solução ótima será ilimitada!**

Exemplo

Considere o exemplo anterior:

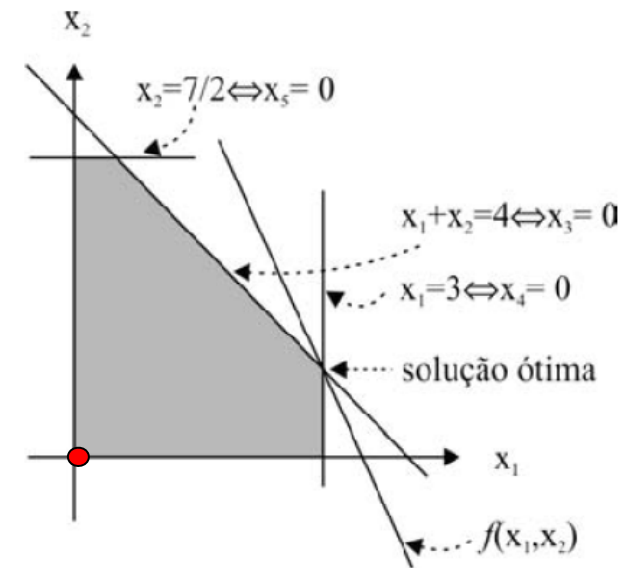
Minimizar $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_4 = 3$$

$$x_2 + x_5 = \frac{7}{2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$



$$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 5) \quad (N_1, N_2) = (1, 2).$$

Solução básica: $\mathbf{x}_B = (x_3, x_4, x_5)$, (obtida para $x_{N_i} = 0$)

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_b \longrightarrow \hat{\mathbf{x}}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Exemplo

A solução é ótima ?

multiplicador simplex:

$$\mathbf{c}_B = (c_{B_1}, c_{B_2}, c_{B_3}) = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \longrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

custos relativos:

$$\hat{c}_1 = c_1 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_1 = -2 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \quad \Bigg| \quad \hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_2 = -1 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Não é ótima. (Por quê ?)

Exemplo

direção simplex $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}_{N_1} \longrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A direção simplex indica a maneira como as variáveis básicas se modificam, ao se aumentar uma dada variável não-básica (no caso, $N_1=1$)

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon$$

$$x_3 = 4 - \varepsilon$$

$$x_4 = 3 - \varepsilon$$

$$x_5 = \frac{7}{2}.$$

Exemplo

Tamanho do passo:

$$\hat{\varepsilon} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2} \right\} = \text{mínimo} \left\{ \frac{4}{1}, \frac{3}{1} \right\} = 3 = \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}$$

Com o valor de $\hat{\varepsilon} = 3$, a variável $x_{B_2} = x_4$ se anula
a variável não-básica x_1 torna-se positiva: $x_1 = \hat{\varepsilon} = 3$

No caso geral:

- Ao resolvermos:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } y_i > 0 \right\}$$

determinamos a variável da base que vai se anular (sair da base).

- Anteriormente, ao escolhermos uma variável não-básica com custo relativo negativo, escolhemos a variável não-básica que vai assumir valor positivo (entrar na base).

No caso geral

- Partição anterior:

$$(x_{B_1} \cdots \underbrace{x_{B_\ell}}_{\text{red circle}} \cdots x_{B_m} \mid 0 \cdots \underbrace{x_{N_k}}_{\text{green circle}} \cdots)$$



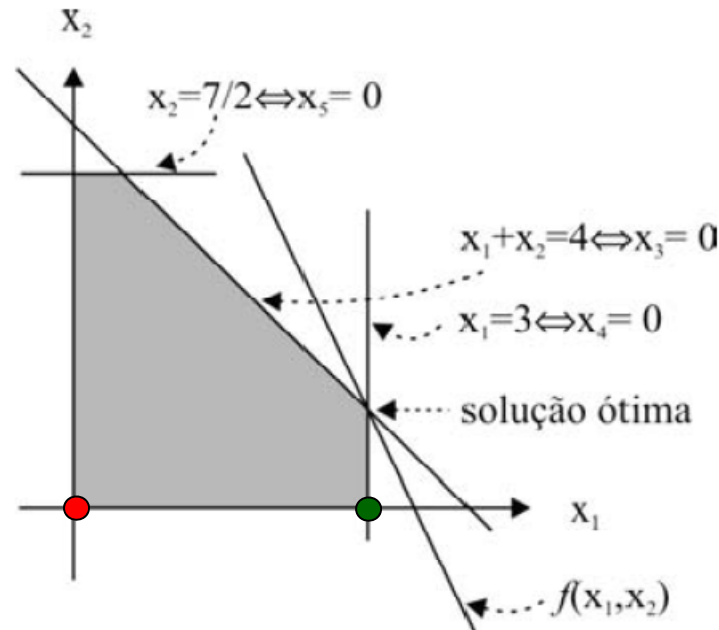
escolhida para entrar
(custo relativo negativo)

escolhida para sair
(primeira ao se anular ao aumentarmos x_{N_k})

A nova solução

- Pode-se mostrar que a nova matriz B é invertível.
- Como os valores das variáveis da nova B são não-negativos, trata-se de uma solução factível.
- Seu custo $f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k} \hat{\epsilon} < f(\hat{\mathbf{x}})$

Graficamente, no exemplo



- * Índice da variável não-básica escolhida para entrar ($N_1 = 1$)
(escolhemos aquela com menor custo relativo)
- * Índice da variável básica escolhida para sair ($B_2 = 4$)
(escolhemos aquela que primeiro se anulava ao aumentarmos ε .)

Nova partição: $B = (3, 1, 5)$ $N = (4, 2)$

Simplex - Fase II

Fase II:

{início da iteração simplex}

Passo 1: {cálculo da solução básica}

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \text{ (equivalentemente, resolva o sistema } \mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \text{)} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0} \end{cases}$$

Passo 2: {cálculo dos custos relativos}

2.1) *{vetor multiplicador simplex}*

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{equivalentemente, resolva o sistema } \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}_B)$$

2.2) *{custos relativos}*

$$\hat{c}_{N_j} = c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j} \quad j = 1, 2, \dots, n - m$$

2.3) *{determinação da variável a entrar na base}*

$$\hat{c}_{N_k} = \text{mínimo} \{ \hat{c}_{N_j}, j = 1, \dots, n - m \} \text{ (a variável } x_{N_k} \text{ entra na base)}$$

Simplex - Fase II

Passo 3: {teste de otimalidade}

Se $\hat{c}_{N_k} \geq 0$, então: *pare {solução na iteração atual é ótima}*

Passo 4: {cálculo da direção simplex}

$\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}$ (equivalentemente, resolva o sistema: $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}_{N_k}$)

Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}

Se $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$, então: *pare {problema não tem solução ótima finita: $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ }*

Caso contrário, determine a variável a sair da base pela razão mínima:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_\ell}}{y_\ell} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } y_i > 0, i = 1, \dots, m \right\} \text{ (a variável } x_{B_\ell} \text{ sai da base)}$$

Simplex - fase II

Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a ℓ -ésima coluna de $\mathbf{B}$ pela k -ésima coluna de $\mathbf{N}$ }:

matriz básica nova: $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \cdots \mathbf{a}_{B_{\ell-1}} \mathbf{a}_{N_k} \mathbf{a}_{B_{\ell+1}} \cdots \mathbf{a}_{B_m}]$

matriz não-básica nova: $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \cdots \mathbf{a}_{N_{k-1}} \mathbf{a}_{B_\ell} \mathbf{a}_{N_{k+1}} \cdots \mathbf{a}_{N_{n-m}}]$

iteração = iteração + 1

Retorne ao passo 1

{fim da iteração simplex}

Exemplo 2.26 Considere o seguinte problema de otimização linear:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Introduzindo variáveis de folga, temos

Tabela 2.13
Dados do problema.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
A	1	1	1	0	0	6
	1	-1	0	1	0	4
	-1	1	0	0	1	4
Min f	-1	-2	0	0	0	

Fase I:

$$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 5), \quad (N_1, N_2) = (1, 2),$$

Tabela 2.14
Dados conforme partição na iteração 1.

	Índices					b
	básicos			não-básicos		
	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=5$	$N_1=1$	$N_2=2$	
[B N]	1	0	0	1	1	6
	0	1	0	1	-1	4
	0	0	1	-1	1	4
[c_B c_N]	0	0	0	-1	-2	$f = 0$

Passo 1:

{cálculo da solução básica} = $\mathbf{x}_B = (x_3, x_4, x_5)$

Resolva o sistema $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ e obtenha $\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Passo 2: {Cálculo dos custos relativos}

2.1) *{vetor multiplicador simplex}*: $(\mathbf{c}_B = (c_{B_1}, c_{B_2}, c_{B_3}) = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0))$.

A solução do sistema $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}_B$ é $\boldsymbol{\lambda}^T = (0, 0, 0)$.

2.2) *{custos relativos}*: $(N_1 = 1, N_2 = 2)$

$$\hat{c}_1 = c_1 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_1 = -1 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_2 = -2 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \leftarrow k = 2. \text{ (a variável } x_{N_2} \leftarrow x_2 \text{ entra na base)}$$

2.3) *{determinação da variável a entra na base}*

Como $\hat{c}_2 = \hat{c}_{N_2} = \text{mínimo} \{ \hat{c}_{N_j}, j = 1, 2 \} = -2 < 0$, então a variável x_2 entra na base.

Passo 3: {teste de otimalidade}

Os custos relativos mostram a função objetivo em termos das variáveis não-básicas:
 $f(\mathbf{x}) = 0 - 1x_1 - 2x_2$. Como há custos relativos negativos, a solução atual não é ótima.

Passo 4: {cálculo da direção simplex}

Resolva o sistema $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a}_2$ e obtenha $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}

$$\hat{\varepsilon} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3} \right\} = \text{mínimo} \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{1} \right\} = 4 = \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}. \text{ (a variável } x_{B_3} = x_5 \text{ sai da base)}$$

Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a ℓ -ésima coluna de $\mathbf{B}$ pela k -ésima coluna de $\mathbf{N}$ }:

$$(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 2) \quad (N_1, N_2) = (1, 5),$$

Tabela 2.15
Dados conforme partição na iteração 2.

	<i>Índices</i>					<i>b</i>
	<i>básicos</i>			<i>não-básicos</i>		
	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=2$	$N_1=1$	$N_2=5$	
$[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}]$	1	0	1	1	0	6
	0	1	-1	1	0	4
	0	0	1	-1	1	4
$[\mathbf{c}_B \mid \mathbf{c}_N]$	0	0	-2	-1	0	$f = -8$

Exercício: continue até obter a solução ótima