Cálculo I - Lista 3 (Gabarito)

1a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 2\}$
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; \quad y \geq \sqrt{8}\}$

1b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 0\}$
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 2\}$

1c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq 2\}$
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; \quad 0 \leq y \leq \frac{7}{2\sqrt{3}}\}$

4d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 1\}$
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R};] \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\}$

2) Seja $[a, b]$ intervalo fechado domímio da função f. Então, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in [a, b]$, ie, f é limitada.
O intervalo precisa ser fechado pois, se $f(x) = \frac{1}{x}$ definida no intervalo aberto $(0, 1)$, não é limitada.

3) $f_1(x) \leq \sup_{x \in A} f_1(x)$ para todo $x \in A$
$f_2(x) \leq \sup_{x \in A} f_2(x)$ para todo $x \in A$
Logo, $f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x \in A} f_1(x) + \sup_{x \in A} f_2(x)$ para todo $x \in A$ e, portanto, $\sup_{x \in A}(f_1(x) + f_2(x)) \leq \sup_{x \in A} f_1(x) + \sup_{\in A} f_2(x)$

$f_1(x) \geq \inf_{x \in A} f_1(x)$ para todo $x \in A$
$f_2(x) \geq \inf_{x \in A} f_2(x)$ para todo $x \in A$
Logo, $f_1(x) + f_2(x) \geq \inf_{x \in A} f_1(x) + \inf_{x \in A} f_2(x)$ para todo $x \in A$ e, portanto, $\inf_{x \in A}(f_1(x) + f_2(x)) \geq \inf_{x \in A} f_1(x) + \inf_{x \in A} f_2(x)$

5a) Contradomínio igual a $\mathbb{R}$: f é par
Contradomínio igual a $\mathbb{R}^+$: f é par e sobrejetora.

5b) f é ímpar.

5c) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x)$ é crescente, ímpar e bijetora.

5d) f é limitada e par.

5e) f é limitada e par.

6 O produto de duas funções pares é uma função par.
O produto de duas funções ímpares é uma função par.
O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

7) f, g funções pares. $f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = f \circ g(x)$, ie, $f \circ g$ é par.
f, g funções ímpares. $f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = f \circ g(x)$, ie, $f \circ g$ é ímpar.

f função par e g função ímpar.
$f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = f \circ g(x)$, ie, $f \circ g$ é par.
$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, ie, $f \circ g$ é par.

8) Se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente então f é injetora. Como f é sobrejetora então f é bijetora e, portanto, invertível.
A recíproca é falsa. Considere $f\colon (0,2) - \{1\} \to (0,2) - \{1\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ -x+3, & x \in (1,2) \end{cases}$$

9)
- $\sqrt{x-2}$
- x
- $\dfrac{1}{x-1}$
- x^2

10) $C\cos(x+\phi) = C\cos x\cos\phi - C\sin x\sin\phi = (C\cos\phi)\cos x + (-C\sin\phi)\sin x$
Resolvendo $A = C\cos\phi$ e $B = -C\sin\phi$ obtemos $C = \sqrt{A^2+B^2}$ e $\phi = \arctan -\frac{B}{A}$