11a. Lista de Exercícios – Integral, Aplicações e Integrais Impróprias – 04/06/2012

Os exercícios com algarismo arábico seguem a numeração do livro do Táboas, os demais são exercícios extras.

I. Verifique que

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k, m \text{ são inteiros positivos e } k \neq m, \\ \pi, & \text{se } k, m \text{ são naturais e } k = m, \\ 2\pi, & \text{se } k = m = 0, \end{cases}$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k, m \text{ são naturais e } k \neq m, \\ \pi, & \text{se } k, m \text{ são naturais e } k = m, \end{cases}$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(mx)\,dx = 0$ se k é inteiro positivo e m é natural.

Sugestão: use as identidades:

$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$

$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

II. Calcule as seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

88. Calcule ao volume cone circular reto de altura h e raio da base r observando que o cone circular reto é um sólido de revolução.

89. Considere o toro gerado pela rotação em torno do eixo x da circunferência $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, $a > r > 0$. Calcule seu volume.

91. Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo y do conjunto limitado pelas curvas $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = e$.

92. Calcule a massa de um líquido que preenche um cilindro circular reto vertical, de altura h e raio da base r, sabendo que a densidade $\rho(z)$ do líquido em função da altura z é dada por $\rho(z) = (1 + \frac{z}{h})^{-1}$.

Estude quanto à convergência ou divergência as seguintes integrais:

93. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx$

96. $\displaystyle\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

97. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\cos x}{x(\ln x)^2}\,dx$

98. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\ln x\,dx$

100. $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx$

III. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

IV. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Estude quanto à convergência ou divergência as seguintes integrais:

V. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

VI. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

VII. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$

107. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

109. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$