

Cálculo I - Lista 2 (Gabarito)

1) Defina $-A = \{x \in \mathbb{R}; -x \in A\}$. Se l é um limitante inferior para A então $-l$ é limitante superior para $-A$. Logo $-A$ é limitado superiormente e, portanto, existe $\sup(-A)$. Afirmamos que $\inf A = -\sup(-A)$. De fato, como $\sup(-A) \geq x$, para todo $x \in (-A)$ então $-\sup(-A) \leq -x$, para todo $x \in (-A)$, ie, $-\sup(-A) \leq y$, para todo $y \in A$. Portando $-\sup(-A)$ é cota inferior para A . Se $c > -\sup(-A)$ for cota inferior para A então $-c < \sup(-A)$ será uma cota superior para $-A$ o que nos dá uma contradição. Portando, existe $\inf A$ e $\inf A = -\sup(-A)$.

2) $\sup A = 9, \inf A = -9, \max A = 9, \min A = -9;$
 $\sup B = 10, \inf B = -10, \max B = 10, \min B = -10;$
 $\sup C = \sqrt{3}, \inf C = -\sqrt{3};$
 $\sup D = 4, \inf D = -1, \min D = -1;$
 $E = (0, 2) \cup (2, 3). \sup E = 3, \inf E = 0;$
 $\inf F = 1;$
 $\sup G = \frac{1}{2}, \inf G = 0, \max G = \frac{1}{2};$
 $\sup H = 2, \inf G = 0, \max G = 2;$

3) Vamos provar que $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$.

De fato, $\sup A \geq a$, para todo $a \in A$ e $\sup B \geq b$, para todo $b \in B$.

Portanto, $\sup A + \sup B \geq a + b$ para todo $a \in A, b \in B$.

Logo, $\sup A + \sup B$ é uma cota superior do conjunto $A + B$.

Dado $\epsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que

$$\begin{aligned}\sup(A) - \epsilon &< a \leq \sup(A) \\ \sup(B) - \epsilon &< b \leq \sup(B)\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup(A) + \sup(B) - 2\epsilon < a + b \leq \sup(A) + \sup(B).$$

Portanto, pela definição alternativa de supremo, segue que $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$.

Vamos provar que $\sup |A| = \max\{\sup A, -\inf A\}$.

De fato. Se $x \in A$ e $x \geq 0$ então $|x| = x \leq \sup A$. Se $x \in |A|$ e $x \leq 0$ então $|x| = -x \leq -\inf A$.

Portanto, $\max\{\sup A, -\inf A\} \geq x$ para todo $x \in |A|$, ie, $\sup |A| \leq \max\{\sup A, -\inf A\}$.

Se $\sup |A| < \max\{\sup A, -\inf A\}$ então, pelas definições de supremo e de ínfimo, existe $a \in A$ tal que $\sup |A| < a$ (caso $\sup |A| < \sup A$) ou $a < -\sup |A|$ (caso $\sup |A| < -\inf A$). No primeiro caso, $\sup |A| < a$ e $a = |a| \in |A|$ o que nos dá uma contradição. No segundo caso, $\sup |A| < -a$ e $-a = |a| \in |A|$ o que nos dá uma contradição.

Vamos provar que se $\alpha > 0$, então $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$,

$\sup A \geq a$ para todo $a \in A$. Portanto, $\alpha \sup A \geq \alpha a$, para todo $a \in A$, ie, $\sup(\alpha A) \leq \alpha \sup A$.

Se $\sup(\alpha A) < \alpha \sup A$, pela de definição de supremo, existe $a \in A$ tal que $\sup(\alpha A) < \alpha a$, o que

nos da uma contradição.

Portanto, $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$.

Vamos provar que se $\alpha < 0$, então $\sup(\alpha A) = \alpha \inf A$.

$\inf A \leq a$ para todo $a \in A$. Portanto, $\alpha \inf A \geq \alpha a$, para todo $a \in A$, ie, $\sup(\alpha A) \leq \alpha \inf A$.

Se $\sup(\alpha A) < \alpha \inf A$, pela de definição de ínfimo, existe $a \in A$ tal que $\sup(\alpha A) < \alpha a$, o que nos da uma contradição.

Portanto, $\sup(\alpha A) = \alpha \inf A$.

$(\alpha = 0) \quad A = \{0\}$.

- 4) $\inf B \leq b$ para todo $b \in B$. Em particular, $\inf B \leq a$ para todo $a \in A$. Portanto, $\inf B \leq \inf A$.

$\sup B \geq b$ para todo $b \in B$. Em particular, $\sup B \geq a$ para todo $a \in A$. Portanto, $\sup B \geq \sup A$.

- 5) (a) $A' = [-1, 1] \cup [\sqrt{3}, 4]$;
(b) $A' = \emptyset$;
(c) $A' = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$;
(d) $A' = \mathbb{Z} - \{0\}$.

- 6) Se $L \in A$ então $L = \max A$.

Se $L \notin A$ então para todo $c > 0$, pela definição de supremo, existe $a \in A$ tal que $L - c < a < L$.

Logo, L é ponto de acumulação de A .