

Distribuição Rayleigh

Métodos dos momentos e de máxima verossimilhança (MV)

Colaboração de Vítor Gratiere Torres em 2023

2026

Neste exemplo são avaliadas algumas propriedades de dois estimadores do parâmetro (λ) da distribuição Rayleigh. Esta distribuição é utilizada em problemas de confiabilidade em Engenharia. É um caso particular da distribuição Weibull em que os parâmetros de forma e escala têm valores 2 e $\sqrt{2}\lambda$, respectivamente. Sua função densidade é

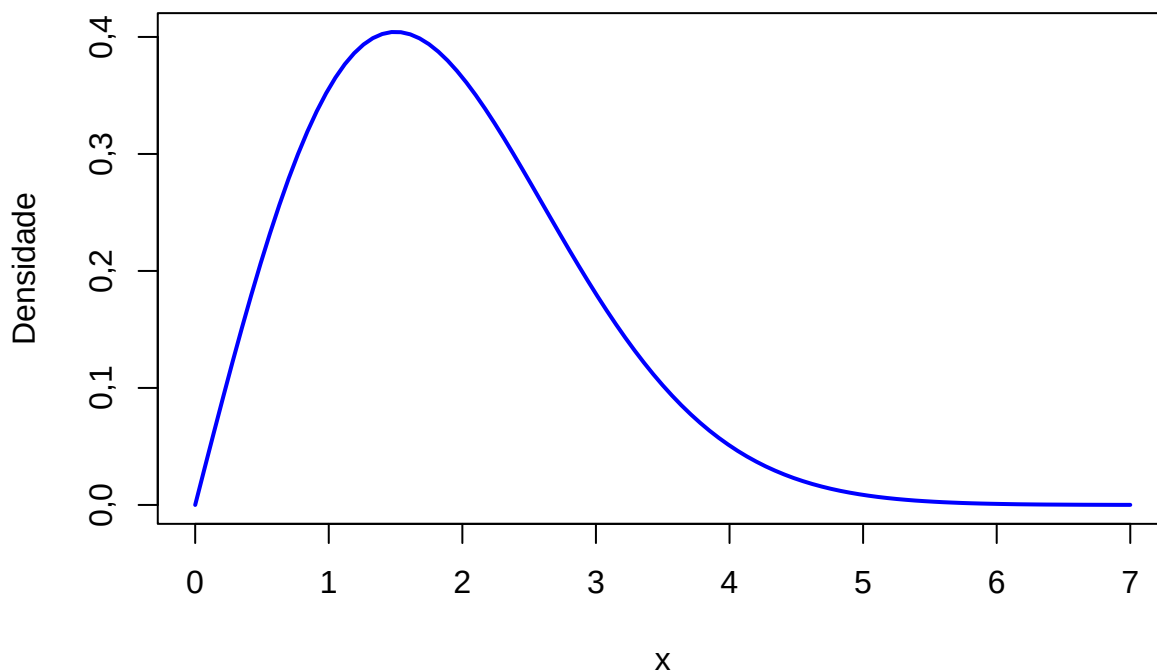
$$f(x) = \frac{x}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right) I_{(0,\infty)}(x), \quad \lambda > 0. \quad (1)$$

Utilizamos simulação de Monte Carlo implementada em linguagem R.

```
# Separador decimal: ","  
options(OutDec = ",")
```

O gráfico da função densidade para $\lambda = 1,5$ é mostrado abaixo (a moda é igual a λ).

```
# Função densidade  
lambda <- 1.5  
curve(dweibull(x, shape = 2, scale = lambda * sqrt(2)), col = "blue", lwd = 2,  
      0, 7, ylab = "Densidade")
```



1. Estimadores

1.1. Método dos momentos

A média é igual a

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda. \quad (2)$$

O estimador de momentos $\tilde{\lambda}$ é obtido da expressão (2). A partir de uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ da variável $X \sim \text{Rayleigh}(\lambda)$ calculamos $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ e obtemos

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda = \bar{X} \Rightarrow \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}, \quad (3)$$

notando que

$$E(\tilde{\lambda}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}E(\bar{X}) = \lambda, \quad (4)$$

ou seja, o estimador de momentos de λ é não viesado. Levando em conta que $\text{var}(X) = \frac{4-\pi}{2}\lambda^2$, temos que

$$\text{var}(\tilde{\lambda}) = \frac{2}{\pi}\text{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\frac{4-\pi}{\pi}\lambda^2, \quad (5)$$

de modo que o erro padrão de $\tilde{\lambda}$ é estimado por

$$\hat{\text{ep}}(\tilde{\lambda}) = \sqrt{\frac{1}{n}\frac{4-\pi}{\pi}}\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{n}\frac{4-\pi}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X} = \sqrt{\frac{2}{n}\frac{4-\pi}{\pi^2}}\bar{X}. \quad (6)$$

Notamos que o resultado em (5) é exato, ou seja, é válido para todo tamanho amostral n .

Aplicando o teorema central do limite à média amostral, concluimos que o estimador em (3) é tal que

$$\sqrt{n}(\tilde{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{4-\pi}{\pi}\lambda^2\right), \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

ou seja,

$$\sqrt{n}\frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\lambda} \xrightarrow{D} N(0, 1), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

1.2. Método de máxima verossimilhança

Pode ser provado que o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}$ é dado por

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}}. \quad (9)$$

Calculamos

$$E(X^2) = \{E(X)\}^2 + \text{var}(X) = \frac{\pi}{2}\lambda^2 + \frac{4-\pi}{\pi}\lambda^2 = 2\lambda^2. \quad (10)$$

Logo,

$$E\left(\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) = \lambda^2. \quad (11)$$

Como a função raiz quadrada é côncava, aplicando a desigualdade de Jensen ao estimador em (9), temos que $E(\hat{\lambda}) < \lambda$, de modo que $\hat{\lambda}$ é um estimador viesado para λ (o verdadeiro valor de λ é subestimado).

O cálculo de $\text{var}(\hat{\lambda})$ não será efetuado.

Usando (1) e (10), a informação de Fisher é

$$I_F(\lambda) = E \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \log(f(X)) \right\}^2 \right) = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log(f(X)) \right) = -E \left(-\frac{3X^2}{\lambda^4} + \frac{2}{\lambda^2} \right) = \frac{4}{\lambda^2}. \quad (12)$$

O estimador em (9) é tal que

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{D} N \left(0, \frac{\lambda^2}{4} \right), \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

ou seja,

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\lambda/2} \xrightarrow{D} N(0, 1), \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (14)$$

A partir de (13), o erro padrão assintótico de $\hat{\lambda}$ é estimado por $\hat{\text{ep}}(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}}{2\sqrt{n}}$.

Comparando as variâncias em (7) e (13), a eficiência assintótica do estimador de máxima verossimilhança em relação ao estimador de momentos é dada por

$$\frac{\frac{4-\pi}{\pi} \lambda^2}{\frac{\lambda^2}{4}} = 4 \frac{4-\pi}{\pi} \approx 1,093 (> 1, \text{ como esperado}). \quad (15)$$

Assim, em termos assintóticos, o estimador de máxima verossimilhança é ligeiramente mais eficiente do que o estimador de momentos.

2. Simulações

No código abaixo são geradas amostras de diferentes tamanhos, estimativas de momentos e de MV são calculadas com seus respectivos erros padrão (ep) aproximados (assintóticos). Ao final são calculados os vieses das estimativas, os desvios padrão das estimativas (ep empírico) e a raiz dos erros quadráticos médios simulados (REQM). Também é realizado o teste de bondade de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS) das estimativas padronizadas usando (8) e (14)

```
R <- 800      # Número de repetições
lambda0 <- 1.5 # Verdadeiro valor
scale0 <- lambda0 * sqrt(2)
tamanho <- c(5, 20, 50) # Tamanhos amostrais
resultt <- resultc <- matrix(NA, length(tamanho), 7) # Resultados

set.seed(25)
lambdat <- lambdac <- c() # Estimativas
nc <- 0
for(n in tamanho) {
  nc <- nc + 1
  for(j in 1:R) {
    # Amostra
    x <- rweibull(n, shape = 2, scale = scale0)
    # Método dos momentos
    lambdat[j] <- sqrt(2 / pi) * mean(x)
    # Método de MV
    lambdac[j] <- sqrt(0.5 * mean(x^2))
  }
}
```

```

# Erros padrão
ept <- sqrt(4 / pi - 1) * lambdat / sqrt(n)
epc <- 0.5 * lambdac / sqrt(n)

# Padronização
zt <- (lambdat - lambda0) / ept
zc <- (lambdac - lambda0) / epc

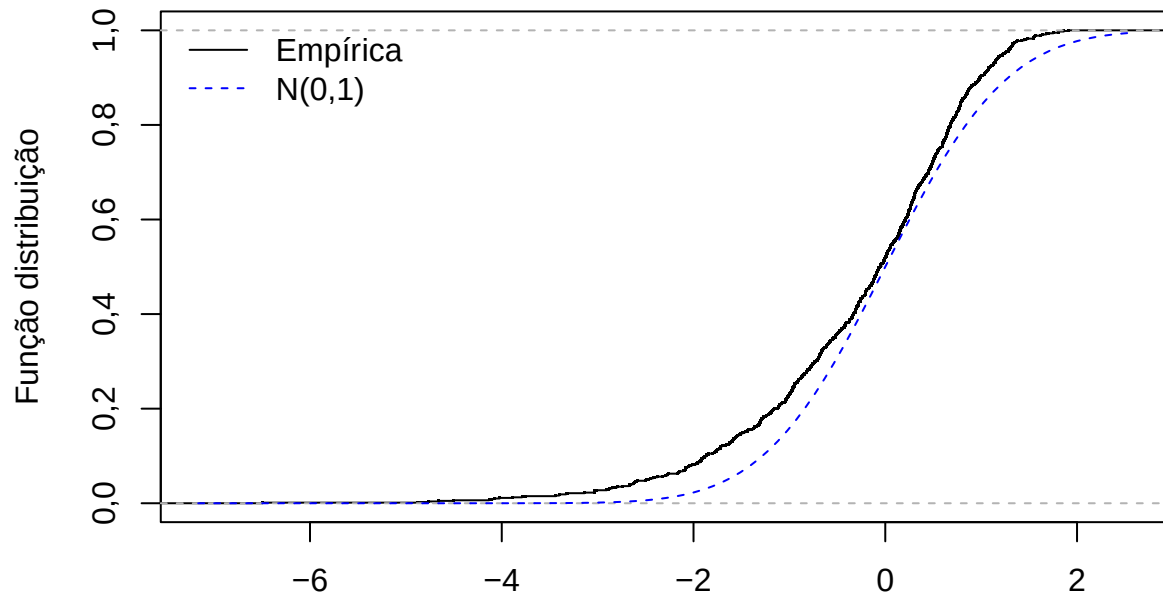
# Gráficos e teste KS de Z
plot(ecdf(zt), pch = ".", main = paste("Momentos - n =", n),
     ylab = "Função distribuição", xlab = "z")
curve(pnorm, add = TRUE, col = "blue", lty = 2)
legend("topleft", c("Empírica", "N(0,1)"), col = c("black", "blue"),
     lty = c(1, 2), bty = "n")
mytestt <- ks.test(zt, "pnorm")

plot(ecdf(zc), pch = ".", main = paste("MV - n =", n),
     ylab = "Função distribuição", xlab = "z")
curve(pnorm, add = TRUE, col = "blue", lty = 2)
legend("topleft", c("Empírica", "N(0,1)"), col = c("black", "blue"),
     lty = c(1, 2), bty = "n")
mytestc <- ks.test(zc, "pnorm")

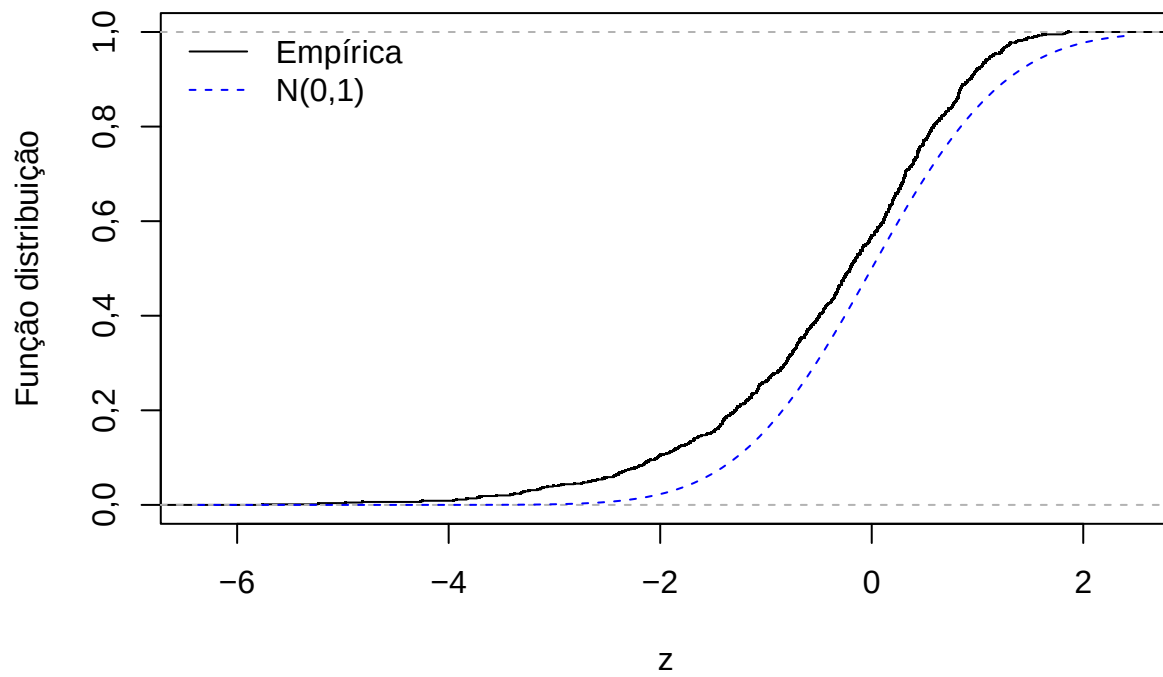
# Resultados
resultt[nc, ] <- c(n, mean(lambdat) - lambda0, sd(lambdat), mean(ept),
  sqrt(mean((lambdat - lambda0)^2)), mytestt$statistic,
  mytestt$p.value)
resultc[nc, ] <- c(n, mean(lambdac) - lambda0, sd(lambdac), mean(epc),
  sqrt(mean((lambdac - lambda0)^2)), mytestc$statistic,
  mytestc$p.value)
}

```

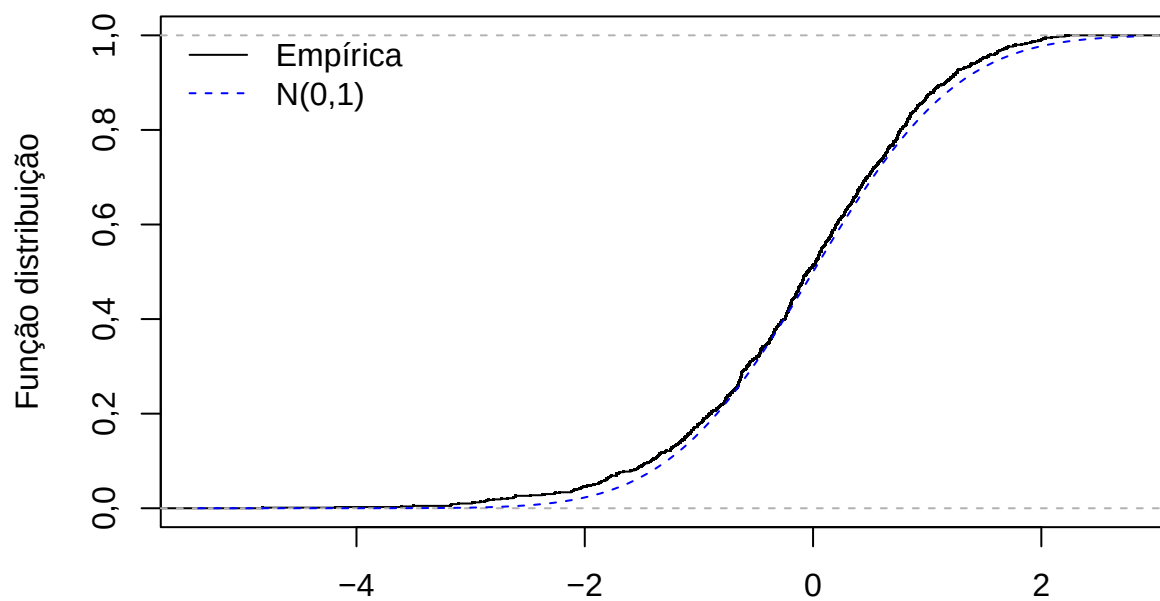
Momentos - $n = 5$



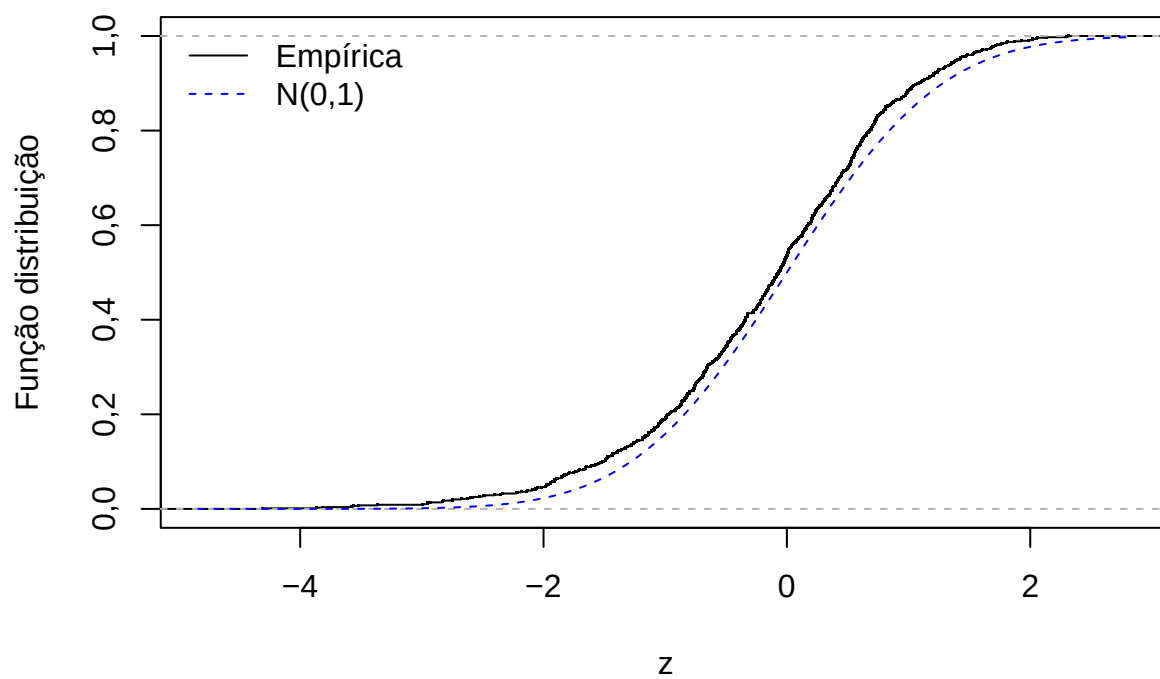
MV - $n = 5$



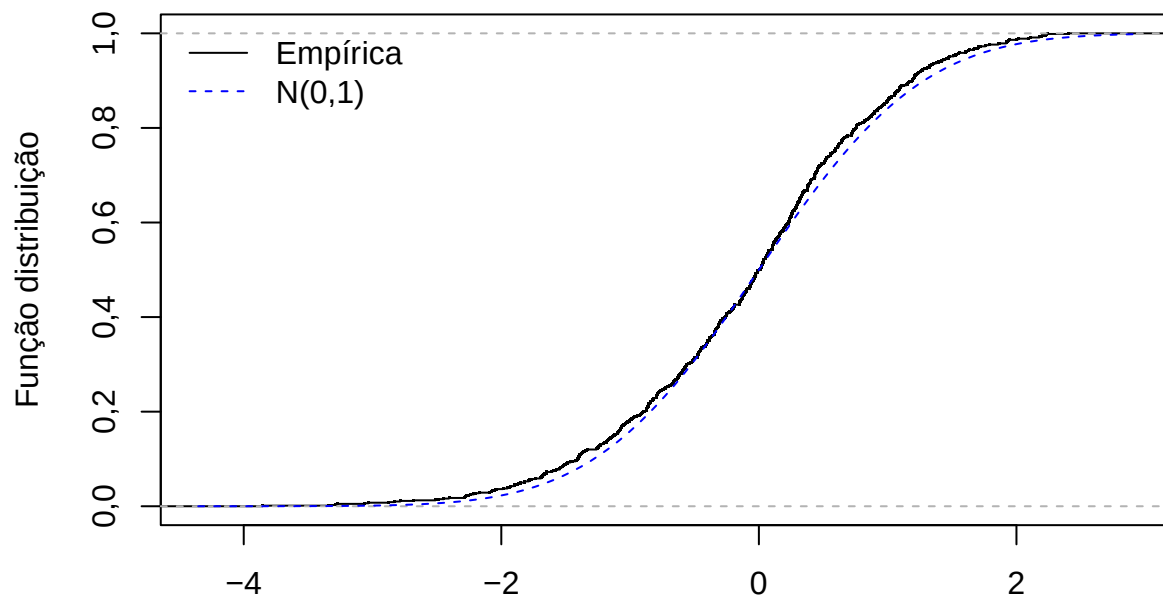
Momentos – $n = 20$



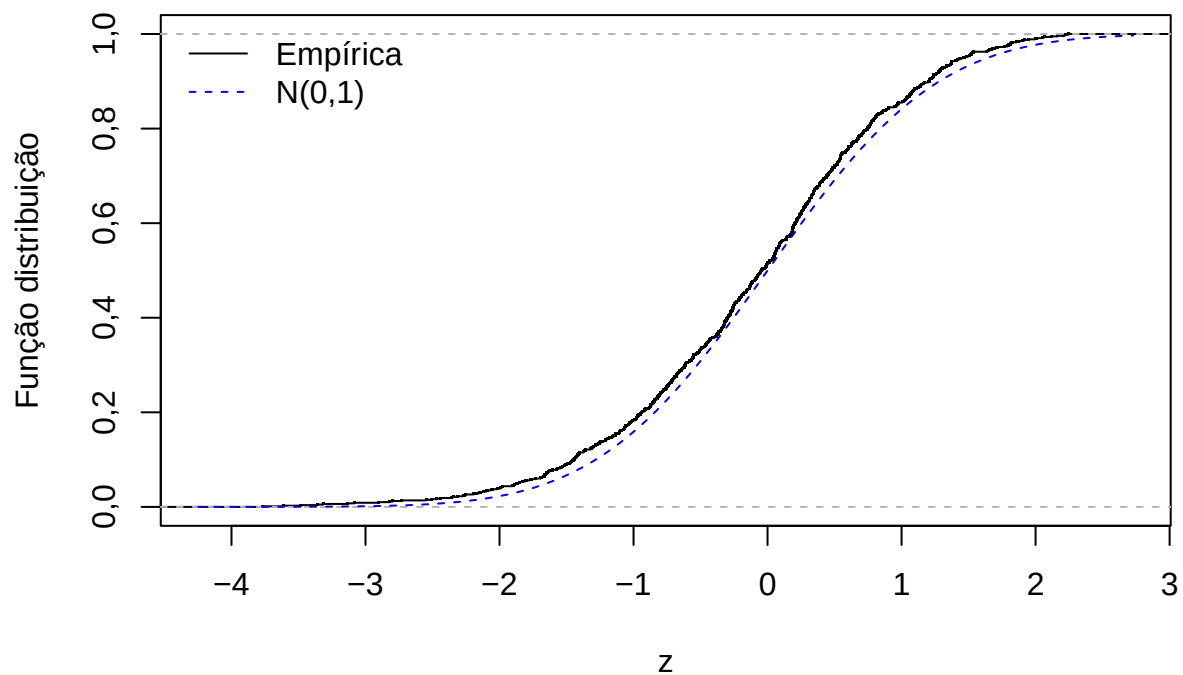
MV – $n = 20$



Momentos – n = 50



MV – n = 50



Por último, os resultados são organizados em tabelas e mostrados com três casas decimais.

```
colnames(resulttt) <- colnames(resulttc) <- c("n", "Viés", "SD",
      "ep", "REQM", "KS", "valor-p")
rownames(resulttt) <- c("Momentos", rep("", length(tamanho) - 1))
rownames(resulttc) <- c("MV", rep("", length(tamanho) - 1))
```

```
cat("\n Número de repetições:", R, "\n lambda0:", lambda0)
```

```
##
```

```
## Número de repetições: 800
```

```
## lambda0: 1,5
```

```
print(round(resultt, 3))
```

```
##          n  Viés    SD    ep  REQM    KS valor-p
## Momentos  5 -0,006 0,353 0,349 0,353 0,082  0,000
##          20  0,004 0,177 0,176 0,177 0,032  0,401
##          50 -0,001 0,110 0,111 0,110 0,039  0,171
```

```
print(round(resultc, 3))
```

```
##      n  Viés    SD    ep  REQM    KS valor-p
## MV   5 -0,045 0,332 0,325 0,334 0,109  0,000
##      20 -0,008 0,167 0,167 0,167 0,060  0,007
##      50 -0,004 0,106 0,106 0,106 0,037  0,236
```

Nota 1. Os resultados acima eram esperados?

Nota 2. Apresente as probabilidades de cobertura de intervalos de confiança de 95% aproximados.

Nota 3. Prove o resultado em (9).