

Teste da razão de verossimilhanças

Parâmetro de localização

2026

Continuamos desenvolvendo o exemplo 8.2.3 em Casella, G. and Berger, R. L. (2002) *Statistical Inference*, 2nd ed., Pacific Grove, CA: Duxbury.

$X_1, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade

$$f(x; \theta) = \exp(- (x - \theta)) I_{[\theta, \infty)}(x), \quad (1)$$

em que $\theta \in \mathbb{R}$.

Para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$, a estatística de teste da razão de verossimilhanças é dada por

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda(x_{(1)}) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{(1)} \leq \theta_0, \\ \exp(-n(x_{(1)} - \theta)), & \text{se } x_{(1)} > \theta_0. \end{cases} \quad (2)$$

Tomando $c \in (0, 1)$, se $\lambda(\mathbf{x}) \leq c$, rejeitamos H_0 ; caso contrário, não rejeitamos H_0 . Levando em conta (2), temos

$$\lambda(\mathbf{x}) \leq c \Leftrightarrow x_{(1)} \geq \theta_0 - \log(c)/n, \quad (3)$$

notando que $\theta_0 - \log(c)/n > \theta_0$.

Para $y \in \mathbb{R}$, temos $F_{X_{(1)}}(y; \theta) = 1 - \{1 - F(y; \theta)\}^n$. Levando em conta (1), $F(x; \theta) = \{1 - \exp(-(x - \theta))\} I_{[\theta, \infty)}(x)$. Logo,

$$F_{X_{(1)}}(y; \theta) = 1 - \exp(-n(y - \theta)) I_{[\theta, \infty)}(y). \quad (4)$$

Notar que a distribuição de $X_{(1)}$ é exponencial com parâmetros de taxa e localização iguais a n e θ , respectivamente.

De (3), a função poder do teste é dada por

$$\beta(\theta) = P_\theta(X_{(1)} \geq \theta_0 - \log(c)/n) = 1 - F_{X_{(1)}}(\theta_0 - \log(c)/n; \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Primeiro, se $\theta \geq \theta_0 - \log(c)/n$, então $\beta(\theta) = 1$, pois $F_{X_{(1)}}(\theta_0 - \log(c)/n; \theta) = 0$. Se $-\infty < \theta < \theta_0 - \log(c)/n$, usando (4),

$$\beta(\theta) = \exp(-n\{\theta_0 - \log(c)/n - \theta\}). \quad (6)$$

Em (6) calculamos $d\beta(\theta)/d\theta = n\beta(\theta) > 0$; logo, o tamanho do teste é $\beta(\theta_0) = c$ (vide H_0).

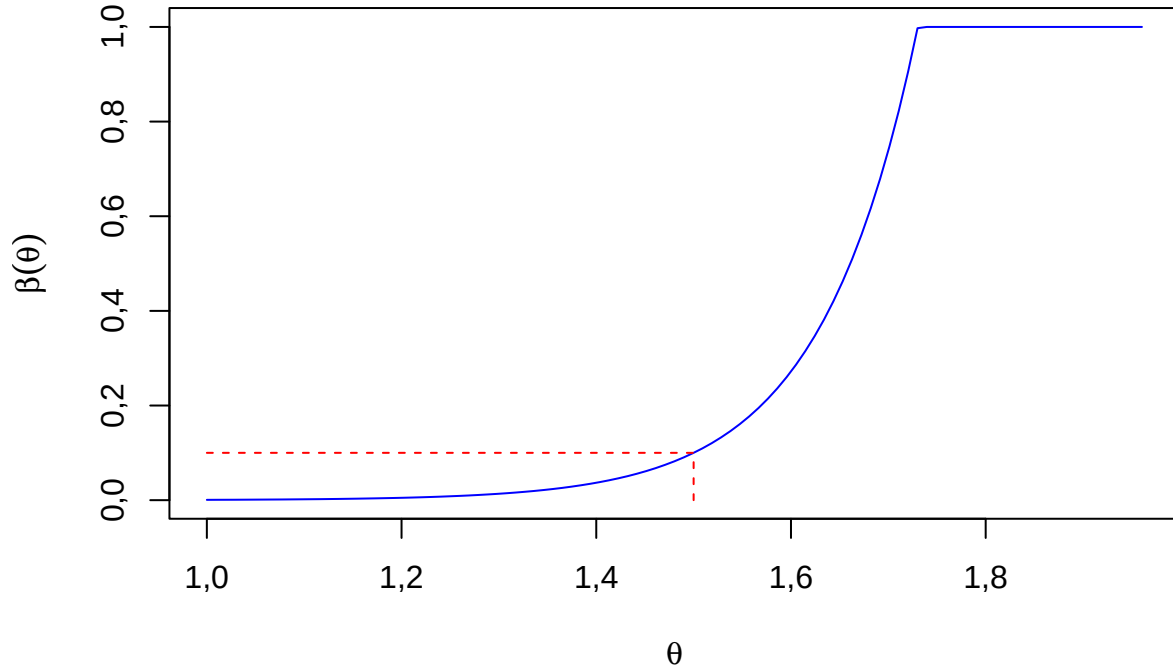
Em seguida implementamos a função poder com a função `pexp` em linguagem R.

```
# Função poder
fp <- function(teta) {
  return(pexp(teta0 - log(c) / n - teta, rate = n, lower.tail = FALSE))
}
```

No exemplo abaixo tomamos $\theta_0 = 1,5$ e $c = 0,1$ em uma amostra de tamanho $n = 10$.

```
# Separador decimal: ","
options(OutDec = ",")
```

```
teta0 <- 1.5
c <- 0.1
n <- 10
curve(fp, from = teta0 - 0.5, to = teta0 - 2 * log(c) / n, col = "blue",
      xlab = expression(theta), ylab = expression(beta(theta)))
segments(c(teta0, teta0 - 0.5), c(0, fp(teta0)), c(teta0, teta0),
         c(fp(teta0), fp(teta0)), lty = 2, col = "red")
```



Nota 1. Superponha ao gráfico acima a função poder do teste com $n = 20$.

Nota 2. Considere o teste com região crítica $R^* = R^*(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \Omega : x_{(1)} \geq \theta_0\}$, ou seja, $c = 1$ em (3). Apresente a função poder deste teste, calcule o seu tamanho e comente. Utilizando diferentes tamanhos amostrais, compare os dois testes.