

Cálculo 1 - Revisão - 10/03/2012

1. Mostre que para quaisquer que sejam os números reais x e y , temos:

$$|xy| = |x||y|$$

2. Se $x \geq 0$ e $x \leq y$, mostre que $x^2 \leq y^2$. Mostre que a afirmação é falsa se considerarmos x, y reais quaisquer.

3. Mostre que para quaisquer números reais a, b

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

4. Dada uma função $y = f(x)$ definida num conjunto $D(f) \subset \mathbb{R}$, dizemos que g é uma extensão de f se

$$i) g: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ onde } D(f) \subset A$$

$$ii) g(x) = f(x) \text{ para } x \in D(f).$$

Assim, seja $f(x) = x^2$, para $x \geq 0$ ($D(f) = [0, \infty)$). Para cada um dos itens a seguir, estenda esta função sobre $\mathbb{R}$ de modo que a extensão g obtida satisfaça:

- (a) g deve ser ímpar.
- (b) g deve ser par.
- (c) g não seja par nem ímpar.

5. Determine o domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ e verifique se sua imagem é limitada. Faça o mesmo para $g(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

6. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios tais que B é limitado superiormente e satisfazem a seguinte propriedade: se $a \in A$ e $b \in B$ então $a \leq b$. Mostre que: $\sup A \leq \inf B$.

7. Sejam $A, B \subset (0, \infty)$ não vazios. Defina $AB = \{ab: a \in A, b \in B\}$.

(a) Mostre que se A e B são limitados então AB é limitado.

(b) Neste caso, prove que: $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ e $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$.

(c) Se retirarmos a condição " $A, B \subset (0, \infty)$ " as afirmações permanecem verdadeiras? Justifique a resposta.

8. Construa um subconjunto de $\mathbb{R}$ que possua, exatamente, três pontos de acumulação.

9. Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4.$$

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras sem impor qualquer restrição adicional em f ? Justifique.

- (a) Quando x tende a 5, $f(x)$ tende a 4.
- (b) A imagem de f contém 4.
- (c) f está definida em algum intervalo (a, b) tal que $a < 5 < b$.

- | | |
|------------------------|-------------------|
| 1. Somente b | 2. Somente a |
| 3. Somente a e b | 4. Somente b e c |
| 5. Todas as afirmações | 6. Somente c |
| 7. Somente a e c | 8. Nenhuma dessas |

10. Sejam $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de B . Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

$$I. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$$

$$II. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

- 1. Somente I.
- 2. Ambas.
- 3. Somente II.
- 4. Nenhuma.

11. Sejam $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de B . Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

$$I. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|.$$

$$II. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

- 1. Somente II.
- 2. Ambas.
- 3. Somente I.
- 4. Nenhuma.

12. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{f(x)g(x) - 4}{9f(x) + 4g(x)} \right]$, quando $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 5$.

Resposta correta: $\frac{2}{7}$.

13. Demonstre, utilizando a definição, que:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10} = 20$$

14. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \rightarrow 17} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{17}}{x - 17}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{\sqrt{5-x} - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

15. Determine se $\lim_{x \rightarrow 0} x^8 \cos\left(\frac{2}{x}\right)$ existe, e se existe, encontre o seu valor.

(a) limite = 2

(b) limite = 0

(c) limite = 8

(d) limite não existe

(e) limite = 7

16. Determine se o limite $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{35 + |x - 5| - 7x}{6x - 30}$ existe, e se existe, calcule o seu valor.

(a) limite = -1

(b) limite = $-\frac{4}{3}$

(c) limite = 1

(d) limite = $\frac{4}{3}$

(e) limite não existe

Sugestão: estude os limites laterais.

17. Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2(x + 8)}$

(a) limite = $-\infty$

(b) limite = ∞

(c) limite = 1

(d) limite = 0

(e) limite = -1/8

(f) Nenhuma das anteriores

18. Determine se o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 6x^2}{4x^7 + 9x^9}$ existe e, se existir, encontre seu valor.

(a) limite = $+\infty$

(b) limite = $-\infty$

(c) limite = 0

(d) limite = 6

(e) nenhuma das anteriores

19. Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosec} x}{7x}$.

(a) limite = 1/7

(b) limite = -1/7

(c) limite = $-\infty$

(d) limite = ∞

(e) nenhuma das anteriores

20. Determine $b > 0$ de modo que o limite abaixo exista:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x + b} - 5}{x}.$$

(a) $b = 26$

(b) $b = 27$

(c) $b = 25$

(d) $b = 24$

(e) nenhuma das anteriores

21. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{2x}{2-x}$.