

1. Qual(is) das seguintes parametrizações é(são) identificável(is)?

(a) $X_i \stackrel{\text{indep.}}{\sim} \text{normal}(\alpha_i + \tau, \sigma^2), i = 1, \dots, n.$

$\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \tau, \sigma^2)^\top \in \Theta = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ e $P_{\boldsymbol{\theta}}$ é a distribuição de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$.

(b) Como no item 1a, mas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfazendo $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$.

(c) $X_{ij} \stackrel{\text{indep.}}{\sim} \text{normal}(\alpha_i + \lambda_j + \tau, \sigma^2), j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, k.$

$\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \tau, \sigma^2)^\top \in \Theta = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ e $P_{\boldsymbol{\theta}}$ é a distribuição de $\mathbf{X} = (X_{ij}, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, k)^\top$.

(d)

$$\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_\delta^2 & \beta_1 \sigma^2 \\ \beta_1 \sigma^2 & \beta_1^2 \sigma^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix} \right),$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\delta^2)^\top \in \Theta = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)^3$ e $P_{\boldsymbol{\theta}}$ é a distribuição de $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_n^\top)^\top$.

2. Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias iid com distribuição geométrica, sendo que $P_\theta(x) = f(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1} I_{\mathbb{N}}(x)$, $0 < \theta < 1$. Utilize a definição para provar que $\sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente para θ . Existe uma forma mais simples de obter esta prova? Se sim, qual?

3. Pode ser provado que duas estatísticas $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ são equivalentes se, e somente se, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{H}(\mathbf{T}_1)$, em que $\mathbf{H}$ é uma função bijetora. Quais das seguintes estatísticas são equivalentes?

(a) $\prod_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.

(b) $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.

(c) $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)^\top$ e $(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)^\top$.

4. Prove que uma estatística $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se, e somente se, a distribuição condicional de $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ dada $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$ para qualquer estatística $\mathbf{U}(\mathbf{X})$.

5. Considere $\theta \in (0, 1)$ e

$$\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{multinomial} \left(m, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1 - \theta), \frac{1}{4}(1 - \theta), \frac{\theta}{4} \right).$$

Apresente uma estatística suficiente para θ .

6. $X_1, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x; \theta) = \exp(\theta - x)I_{(\theta, \infty)}(x)$. Prove que $T(\mathbf{X}) = \min(X_1, \dots, X_n)$ é uma estatística suficiente para θ .

7. Sejam $X_i \stackrel{\text{indep.}}{\sim} f_i(\cdot; \theta)$, em que $f_i(x; \theta) = \exp(i\theta - x)I_{(i\theta, \infty)}(x)$, $i = 1, \dots, n$. Represente graficamente $f_i(x; \theta)$. Prove que $\min_{i=1}^n (X_i/i)$ é uma estatística suficiente para θ .

8. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\theta, a\theta^2)$, sendo que $a > 0$ é uma constante conhecida e $\theta > 0$. Apresente uma estatística suficiente para θ .

9. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}(\theta_1, \theta_2)$, em que $\theta_1 < \theta_2$. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top$.

10. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ no exercício 1d.

11. Considere $X_i \sim \text{normal}(\mathbf{w}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$ independentes, $i = 1, \dots, n$, em que $\mathbf{w}_i$ é um vetor $p \times 1$ de constantes conhecidas e $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $p \times 1$ de parâmetros, sendo que $p > n$. Tomando $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \sigma^2)^\top \in \Theta = \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$ e $P_{\boldsymbol{\theta}}$ como sendo a distribuição de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$, prove que este modelo não é identificável.