

1. Calcule $f'(a)$, pela definição, sendo dados

a) $f(x) = x^2 + x$ e $a = 1$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $a = 3$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $a = 2$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $a = 2$

2. Para cada um dos casos a seguir, dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f , definida e diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que

(a) $f'(1) = 0$.

(b) $f'(x) > 0$ para todo x .

(c) $f'(0) < f'(1)$.

(d) $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$.

(e) $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$.

3. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule a derivada $f'(x)$ e estude o sinal de $f'(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(c) Utilize as informações acima para esboçar um gráfico de f .

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(a) f é contínua em 1?

(b) f é diferenciável em 1? Em caso afirmativo, calcule $f'(1)$.

5. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(a) f é diferenciável em 1? Em caso afirmativo, calcule $f'(1)$.

(b) f é contínua em 1?

6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Ache os valores de m e b que faça f diferenciável em toda parte.

7. Se $F(x) = x^3 - 5x + 1$, encontre $F'(1)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 5x + 1$ no ponto $(1, -3)$.

8. Se a reta tangente a $y = f(x)$ ao gráfico de f em $(4, 3)$ passa no ponto $(0, 2)$, encontre $f(4)$ e $f'(4)$.
9. Se $G(x) = x/(1 + 2x)$, encontre $G'(a)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = x/(1 + 2x)$ no ponto $(-1/4, -1/2)$.
10. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \frac{5}{(1 + x^2)}$ no ponto $(1, \frac{5}{2})$.
11. Encontre as abscissas dos pontos do gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ onde a reta tangente é:
 - (a) horizontal;
 - (b) paralela à reta $2y + 8x - 5 = 0$.
12. Mostre que existem exatamente duas retas tangentes ao gráfico de $y = (x + 1)^3$ que passam pela origem. Escreva as equações dessas retas.
13. Para todo $\lambda > 0$, a parábola $y = \lambda x^2 + 1$ passa pelo ponto $(0, 1)$. Para que valor de λ o faz tangenciando a reta $y = x + 1$?
14. Determine os valores de x de modo que nos correspondentes pontos nos gráficos de $y = \cos x$ e $y = \sin x$ as respectivas retas tangentes sejam paralelas.
15. Qual o ângulo entre os gráficos das funções seno e cosseno nos pontos em que eles se cruzam? [*o ângulo entre os gráficos de duas funções diferenciáveis, f e g , em (x_0, y_0) é o ângulo entre as retas tangentes: $|\arctg f'(x_0) - \arctg g'(x_0)|$].*
16. Mostre que os gráficos $y = x^2$ e $y = 2x^3 + 1$ são tangentes no ponto $(1, 3)$ [*isto é, têm reta tangente comum nesse ponto*]. Esboce os gráficos.
17. Calcule a derivada de cada uma das funções:

$$a) f(x) = x^2 \operatorname{cosec} x \quad g) f(t) = t^2 - \frac{1}{t^2}$$

$$b) f(x) = \cos^2 x \cotg x \quad h) f(s) = \sec^2 s + \operatorname{stg} s$$

$$c) f(x) = (3x)^{-5} \quad i) f(x) = \frac{x}{\operatorname{arcsen} x}$$

$$d) f(x) = \frac{\sec^2 x}{\cotg^2 x} \quad j) f(x) = (\arccos x)^3$$

$$e) f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \quad k) f(x) = \operatorname{tg} (3x^5 - 2x^3 + x)^{-2}$$

$$f) f(x) = (x^2 + \frac{1}{x^2})^7 \quad l) f(x) = \operatorname{arctg} [(2x - 1)^{10} + 2]^{1/2}$$

18. Mostre que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e periódica, de período T , então $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica, de período T .
19. Seja f uma função diferenciável. Mostre que se f for par, então f' é ímpar e, se f for ímpar, então f' é par.
20. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e defina $g(x) = f(x^3 - x^2 - 1)$. Supondo que $f(x) = f'(3) = 2$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(2, 2)$.
21. Considere uma escada AB de 5 m de altura apoiada em uma parede vertical, que é puxada horizontalmente pela base A. A base A tem velocidade $v = 2$ m/s, na direção oposta a parede. Qual a velocidade do topo B no instante que A está a uma distância de 3 m do pé da parede?
22. Se x indica a medida de um arco em graus (e não em radianos), use a regra da cadeia para verificar que

$$(\sin x)' \neq \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

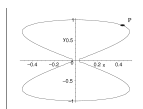
Neste caso, calcule $(\sin x)'$, $(\cos x)'$ e $(\tan x)'$. Compare como ficam os gráficos de $y = \cos x$ nos dois casos, isto é, ora com x representando a medida do arco em radianos, ora em graus.

23. Encontre todas as derivadas de ordem superior de $\arcsin x$ em $x = 0$.
24. Que condições devem satisfazer α , β , a , b , e c para que

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$$

tenha derivada não nula em toda a reta?

25. Admita que y é definido implicitamente como função de x e calcule $y' = \frac{dy}{dx}$:
 - (a) $x^3 + y^3 = a^3$
 - (b) $x^3 + x^2y + y^4 = 0$
 - (c) $a \cos^2(x + y) = b$
 - (d) $xy = \arctan(x/y)$
26. Encontre o coeficiente angular e uma equação da reta tangente à curva $y^4 = y^2 - x^2$ no ponto $P = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Veja figura a seguir.



27. Verifique que

$$(a) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} \right] = x^2 \arcsin x$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3 \arcsin \left(\frac{1-3x}{6x} \right) \right] = \frac{1}{x^2 \sqrt{27x^2+6x-1}}$$

28. Seja $y = \frac{-2}{x^2+k}$, onde k é uma constante. Verifique que $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$.

29. Seja $y = \cos \omega t$. Verifique que $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$.

30. Determine a equação da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, no ponto (x_0, y_0) , $y_0 \neq 0$.

31. A reta tangente à curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, no ponto (x_0, y_0) , $x_0 > 0, y_0 > 0$, intercepta os eixos x e y nos pontos A e B , respectivamente. Mostre que a distância de A a B não depende do ponto (x_0, y_0) .