EST5102 Inferência Estatística
1ª prova - 2026
(esboço de solução)

1. (a) $\theta_2 = 1$: $f(x;\theta_1) = a(\theta_1, 1)\exp\left(-\theta_1 x - x^2 - \theta_1 x^3\right) I_{(0,\infty)}(x)$

$= \underbrace{a(\theta_1,1)\exp\left(-(x+x^3)\theta_1\right)}_{\text{função de } \theta_1 \text{ e } x+x^3} \cdot \underbrace{\exp(-x^2)\cdot I_{(0,\infty)}(x)}_{\text{função de } x}$

Amostra aleatória de tamanho n: $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i^3$ é suficiente para θ_1 pelo teorema da fatoração.

(b) $\theta_1 = 1$. Analogamente ao item 1a, $T_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n X_i^3$ é suficiente para θ_2.

(c) $f(x;\theta_1,\theta_2) = \underbrace{a(\theta_1,\theta_2)\exp\left(-\theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_1\theta_2 x^3\right)}_{\text{função de } \theta_1,\theta_2,x,x^2,x^3} \underbrace{I_{(0,\infty)}(x)}_{\text{função de } x}$

Pelo teorema da fatoração, $\underset{\sim}{T} = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i^3\right)^T$ é conjuntamente suficiente para $(\theta_1,\theta_2)^T$.

2. (a) $f(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{(1-\theta)/\theta} \prod_{i=1}^n I_{(0,1)}(x_i)$

$= \underbrace{\frac{1}{\theta^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/\theta}\cdot\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-1}}_{\text{função de } \theta \text{ e } \prod_{i=1}^n x_i} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^n I_{(0,1)}(x_i)}_{\text{função de } \underset{\sim}{x}}$

$\Rightarrow T = \prod_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

(b) $f(x;\theta) = \exp\left\{\frac{1}{\theta}\log(x) - \log(\theta) - \log(x)\right\} I_{(0,1)}(x)$.

Tomando $c(\theta) = 1/\theta$, $t(x) = \log(x)$, $d(\theta) = -\log(\theta)$, $s(x) = -\log(x)$ e $A = (0,1)$, vemos que é de uma família exponencial.

(c) $\eta = 1/\theta$ e $d_0(\eta) = -\log(1/\eta) = \log(\eta)$

EMV: $E_\eta[\log(X)] = -d_0'(\eta) = -\frac{1}{\eta}$

$\Rightarrow \hat{\eta} = -\frac{1}{\overline{\log(X)}} \Rightarrow \hat{\theta} = -\overline{\log(X)}$, em que

$\overline{\log(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)$.

De outra forma, $\ell(\theta) = \text{constante} - n\log(\theta) + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$,

e $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$. $\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta = -\overline{\log(x)}$.

Temos $\left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = -\overline{\log(x)}} = -\frac{n}{\{\log(\bar{x})\}^2} < 0 \Rightarrow \hat{\theta} = -\overline{\log(X)}$.

3. (a) $f(\underset{\sim}{x};\theta) = \alpha^n \beta^{n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha}.\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\frac{1}{\beta}]}(x_i)$

$= \alpha^n \beta^{n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} I_{(0,\frac{1}{\beta}]}(x_{(n)}) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$

função de θ, $\prod_{i=1}^{n} x_i$ e $x_{(n)}$ — função de $\underset{\sim}{x}$

$\Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} X_i, X_{(n)}\right)^T$ é conjuntamente suficiente para θ.

(b) $L(\theta) \propto \alpha^n \beta^{n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} . I^{(\beta)}_{(0,\frac{1}{x_{(n)}}]}$.

Para todo $\alpha > 0$, $\alpha^n \beta^{n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha}$ é função crescente em β. Logo, $\hat{\beta} = \frac{1}{X_{(n)}}$. Substituindo em $\ell(\alpha,\beta)$ obtemos $\ell(\alpha) = \ell(\alpha,\hat{\beta}) = \ell(\alpha, x_{(n)})$

$= \text{constante} + n\log(\alpha) + n\alpha\log(\hat{\beta}) + \alpha\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$.

Segue que $\frac{\partial \ell(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\log(\hat{\beta}) + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$.

Resolvendo $\frac{\partial \ell(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ obtemos $\alpha^* = -\frac{1}{\log(\hat{\beta}) + \overline{\log(x)}}$.

Temos $\left.\frac{\partial^2 \ell(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{n}{(\alpha^*)^2} < 0$. Logo, $\hat{\alpha} = \frac{1}{\log(X_{(n)}) - \overline{\log(X)}}$. 3

4. $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ou $\bar{X}$ é suficiente e completa para θ. Temos $\tau(\theta) = \theta^2$. Como $E_\theta(X^2) = \text{var}_\theta(X) + \{E_\theta(X)\}^2$ $= \theta + \theta^2$, segue que $\theta^2 = E_\theta(X^2) - \theta$; logo, $m_2 - m_1$ $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}$ é um ENV de $\tau(\theta)$.

Por outro lado, $E_\theta[(n\bar{X})^2] = E_\theta\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \text{var}_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \left\{E_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right\}^2$ $= n\theta + n^2\theta^2$. Portanto, $(n\bar{X})^2$ é um ENV de $n\theta + n^2\theta^2$ e $\bar{X}^2 - \bar{X}/n$ é um ENV de $\tau(\theta)$ e é o ENVVUM, pois é função de $\bar{X}$.

5. $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$. A distribuição de X é de uma família exponencial com $T(x) = x$ e $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente e completa para θ.

(a) Temos $E_\theta(X) = 1/\theta$; logo $\bar{X}$ é o ENVVUM de $1/\theta$.

(b) Pelo enunciado, $\hat{\theta} = \frac{n-1}{n\bar{X}}$ é um ENV de θ e é o ENVVUM, pois é função de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(c) Para $x > 0$, temos $\frac{\partial}{\partial\theta}\log(f(x;\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta}\{\log(\theta) - \theta x\}$ $= \frac{1}{\theta} - x$. Portanto, no item 5a temos um ENVVUM cuja variância é igual ao limite inferior dado pela desigualdade da informação. No item 5b isso não ocorre, pois θ é uma função não linear de $1/\theta$.