

3ª Lista de Exercícios - SME0820 Análise de Regressão - 28/04/2014

Exercício 1. Determine o posto das matrizes A e B a seguir

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 2. Mostre que se uma matriz A admite inversa, então ela é única.

Exercício 3. Determine a matriz A associada às formas quadráticas

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2$

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 5x_3^2$

Exercício 4. Seja A uma matriz $p \times n$ qualquer. Prove que $A'A$ é simétrica.

Exercício 5. Mostre que as raízes características de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.

Exercício 6. Considere $\underline{X} = [X_0, X_1, X_2]' \sim N_3(\underline{0}, \Sigma)$ com $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a distribuição marginal de X_1 .

(b) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2 .

(c) Determine a distribuição condicional de X_0 dado $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$.

(d) Determine ρ_{12} , ρ_{01} e ρ_{02} , em que $\rho_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) / \sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}$.

(e) Determine a distribuição de $Z = 4X_0 - 6X_1 + X_2$.

(f) Determine a covariância entre Z_1 e Z_2 , onde $Z_1 = X_0 - X_1 + 2X_2$ e $Z_2 = 2X_1$.

Exercício 7. Sejam as variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$, em que $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variâncias e covariâncias de $(Y_1, Y_2)^\top$ e mostre que é positiva semidefinida.

Exercício 8. Prove que $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 > 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 9. Seja $\underline{Y}$ um vetor aleatório tal que $\underline{Y} \sim N_n(\underline{\mu}, \Sigma)$. Prove que se $\underline{Y}^\top A \underline{Y} \sim \chi_{r,\lambda}^2$ então $(\underline{Y} - \underline{\mu})^\top A (\underline{Y} - \underline{\mu}) \sim \chi_r^2$.

Exercício 10. Se $\underline{Y} \sim N_n(\underline{\mu}, \Sigma)$ com $r(\Sigma) = n$, determine a distribuição de $\underline{Y}^\top \Sigma^{-1} \underline{Y}$.

Exercício 11. Se $[X, Y]'$ tem distribuição normal bivariada, com $X \sim N(8, 4)$ e $Y \sim N(3, 2)$ e que $E(Y|X = x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x$, determine o coeficiente de correlação entre X e Y e $\text{Var}(Y|X = x)$.

Exercício 12. Se $Y_1, \dots, Y_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, prove que

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \text{ e } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}$$

são variáveis aleatórias independentes.

Dica: Escreva $\bar{Y}$ e S^2 como formas linear e quadrática de $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$.

Exercício 13. Se $\underline{Y} \sim N_n(\underline{\mu}, \Sigma)$ com $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^\top$, $\underline{\mu} = (\mu, \mu, \mu)^\top$ e $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, determine o valor de a para que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Y_1 - Y_2 - Y_3$ sejam independentes.

Exercício 14. Considere o modelo de regressão linear simples

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

com a suposição de que $\epsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Reescreva o modelo utilizando notação matricial e mostre que, nesse caso,

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top \underline{Y} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ S_{XY}/S_{XX} \end{pmatrix}$$

Exercício 15. Considere os dados do arquivo “Máquinas para manutenção” (coteia wiki) que representam dados de uma empresa que oferece serviço de manutenção preventiva anual nos equipamentos que vende. Em um determinado mês, 18 clientes requereram manutenção nos equipamentos comprados e as variáveis Y , X_1 , X_2 , X_3 referem-se, respectivamente, ao tempo gasto na manutenção (em minutos), número de equipamentos, idade média dos equipamentos (em meses) e tempo de experiência do funcionário que realizou a manutenção (em anos).

- Faça o gráfico de dispersão de Y em função de X_1 .
- Adote um modelo de regressão linear simples para relacionar Y com X_1 e obtenha uma análise completa da aplicação desse modelo aos dados. Construa a tabela ANOVA, calcule R^2 , obtenha os estimadores dos parâmetros e respectivos erros padrão, faça os testes de hipóteses para a significância dos parâmetros do modelo.
- Faça a análise dos resíduos construindo gráficos de dispersão em função dos valores ajustados, X_1 e tempo, gráfico de probabilidade normal e histograma.

Exercício 16. As vendas anuais de um produto introduzido no mercado há 10 anos está sendo estudada por uma empresa de consultoria de pesquisa de mercado. Os dados coletados foram o ano (X) e o número de produtos vendidos em milhares de unidades (Y) e encontram-se armazenados no arquivo “Estudo de vendas” (coteia wiki).

- Faça o gráfico de dispersão de Y em função de X .
- Adote um modelo de regressão linear simples para relacionar Y com X e obtenha uma análise completa da aplicação desse modelo aos dados. Construa a tabela ANOVA, calcule R^2 , obtenha os estimadores dos parâmetros e respectivos erros padrão, faça os testes de hipóteses para as significâncias dos parâmetros do modelo. Faça a análise dos resíduos construindo o gráfico de dispersão em função dos valores ajustados. O modelo parece estar adequado?
- Utilize uma transformação para a variável Y (use a raiz quadrada) e refaça os itens (a) e (b) com a variável transformada.