

# Cálculo I - Lista 5 (Gabarito)

---

1) Falso.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$  Apesar de  $f(-1) = 1 > 0$ , em qualquer vizinhança de  $-1$ , a função  $f$  assume valores negativos, ie, continuidade é essencial para garantir o teorema de conservação do sinal.

2) Para  $f$  ser contínua em  $x = 2$ , devemos ter  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 4$ , ie

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \lambda x = \lambda 2 = 4$$

Portanto,  $\lambda = 2$ .

3)  $f$  é contínua em  $x = 1$ . De fato, dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\delta = \epsilon$ . Se  $|x - 1| < \delta$  então,

$$|f(x) - f(1)| = \begin{cases} |x - 1| < \delta = \epsilon & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

4a) Recordemos que  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ . De fato, se dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\delta = \epsilon$ . Se  $|x - a| < \delta$  então  $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \epsilon$ .

Se  $a \neq 0$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin a}{a} = f(a)$ .

Se  $a = 0$ , pelo Primeiro Limite Fundamental,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$ .

Portando,  $f$  é contínua.

4b) Se  $a \neq 0$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x \sin \frac{1}{x} = a \sin \frac{1}{a} = f(a)$ .

Se  $a = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$ . (produto de uma função que vai para zero por uma função limitada)

Portando,  $f$  é contínua.

5) Apenas observe que as três funções são inversas de funções estritamente monótonas em um intervalo. (Usar Proposição 2.4.22, página 78 do livro do Plácido.)

6) Como  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  é contínua em  $x = 1$ , então

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) = \arcsin\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

7) Observe que  $\tan x = x$  se, e somente se,  $\tan x - x = 0$ . Seja  $g(x) = \tan x - x$ . Como  $g: (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, estritamente crescente e

$$\lim_{x \rightarrow k\pi - \pi/2} = -\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow k\pi + \pi/2} = \infty$$

pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um único  $x_k \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$  tal que  $g(x_k) = 0$ , para todo  $k$  natural. (unicidade segue do fato de  $g$  ser estritamente crescente)

8) Seja  $f(x) = x^3 - 15x + 1$ . Veja que

$$f(-4) < 0 \text{ e } f(0) > 0;$$

$$f(0) > 0 \text{ e } f(1) < 0;$$

$$f(1) < 0 \text{ e } f(4) > 0;$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existem  $x_1 \in (-4, 0)$ ,  $x_2 \in (0, 1)$  e  $x_3 \in (1, 4)$  raízes de  $f$ .

- 9) Se  $g(x) = f(x) - x$  então  $f(c) = c$  se, e somente se,  $g(c) = 0$ . Veja que  $g(0) = f(0) \geq 0$  e  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário,  $g$  assume todos os valores entre  $g(1)$  e  $g(0)$ . Portanto, existe  $c \in [0, 1]$  tal que  $g(c) = 0$ .