

Cálculo I - Lista 7 (Gabarito)

- 1a) -1 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo
- 1b) 2 é ponto de mínimo e -2 é ponto de máximo
- 1c) 0 e 12 são pontos de mínimo e 6 é ponto de máximo
- 1d) não possui ponto extremo, é estritamente crescente e 0 é ponto de inflexão
- 1e) 1 é ponto de mínimo
- 1f) -1 e 1 são pontos de máximo; 0 é ponto de mínimo;
- 1g) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ pontos de máximo e $\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ pontos de mínimo
- 1h) não possui ponto extremo e é estritamente crescente
- 1i) 0 é ponto de mínimo
- 1j) $-\sqrt{3}$ ponto de máximo e $\sqrt{3}$ ponto de mínimo
- 3) mínimo: $f(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
máximo: $f(\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 4) Para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\tilde{x} \in (x, x+1)$ tal que $f'(\tilde{x}) = f(x+1) - f(x)$. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = c > 0$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. (Veja que caso contrário teríamos $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$)
- 5) Não. Contra-exemplo: $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 1$ e $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ se $x < 1$
- 6) Sejam $x_1 < x_2$ raízes de $f(x)$. Do Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$, ie, c é raiz de $f'(x)$.
- 7) Sejam $x_1 < x_2$ raízes de $f'(x)$ tais que $f'(x) \neq 0$ para $x \in (x_1, x_2)$. Suponha que existam $a_1, a_2 \in (x_1, x_2)$, $a_1 < a_2$ raízes de $f(x)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a_1, a_2)$ tal que $f'(c) = 0$, o que é uma contradição.
- 8) Note que a derivada segunda é uma constante não nula.
- 9) Note que a derivada segunda é uma equação na forma $f''(x) = ax + b$
- 10) $f'(x) \geq f(a+1) - f(a) > 0$ para todo $x \geq a$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- 11) Sabemos que existe $x_0 = \min_{x \in I} f(x)$. Tome $x_1 \in I$, $x_1 \neq x_0$, portanto, $f(x_0) \leq f(x_1)$. O segmento $P_0P_1 = \{X = (1-\lambda)P_0 + \lambda P_1, 0 \leq \lambda \leq 1\}$, onde $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P_1 = (x_1, f(x_1))$, está contido no conjunto $\mathcal{A} = \{(x, y); x \in I, y \geq f(x)\}$. Tome $\epsilon > 0$ qualquer. Como f é estritamente convexa, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $|(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 - x_1| < \epsilon$ e $f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) < (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \leq f(x_1)$. Portanto, x_1 não pode ser ponto de mínimo.
- 12) $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$

13) $y - 3/4 = \frac{3\sqrt{3}}{8}x + \sqrt{3}/4$

14) $x = y = a/2$

15) 32

16) $\frac{5-\sqrt{7}}{3}\text{dm}$

17) 2m de raio e 6m de altura

18) O ponto menos iluminado é aquele que está a uma distância de $\frac{\sqrt[3]{P_1}l}{\sqrt[3]{P_1} + \sqrt[3]{P_2}}$ da fonte relativa a P_1 .